Perfect equilibrium in infinite games

Nederlandse Samenvatting

Simon en Stinchcombe hebben in 1995 het begrip perfect evenwicht gedefinieerd voor spelen met oneindige compacte verzamelingen van acties. Zij onderscheidden twee hoofdlijnen voor de mogelijke definities van perfect evenwicht. De eerste lijn is gebaseerd op het begrip compleet gemengd evenwicht, waarmee het sterke en zwakke perfecte evenwicht zijn gedefinieerd. Deze aanpak kan worden opgevat als een rechtstreekse generalisatie van de oorspronkelijke "trembling hand" definitie van perfect evenwicht door Selten in 1975. De tweede lijn van definities, vaak aangeduid met de term "finitistic approach", maakt gebruik van de notie van het ε-perfecte evenwicht in eindige benaderingen van het oorspronkelijke oneindige spel. Het resulterende begrip wordt aangeduid met "limiet-van-eindig" perfect evenwicht. Simon en Stinchcombe bewezen dat de eerste lijn van definities alleen gebruik maakt van zogeheten limiet toelaatbare strategieën. Verder spraken ze het vermoeden uit dat de twee benaderingen niet vergelijkbaar waren.

In hoofdstuk 2 onderzoeken we de relaties tussen de verschillende soorten van perfecte evenwichten binnen het kader van spelen in strategische vorm met compacte actieruimten en continue uitbetalingsfuncties. Verder introduceren we een verbeterde versie van de "finitistic approach", aangeduid met " globaal-limiet-van-eindig" perfect evenwicht, en bewijzen het bestaan van zulke evenwichten. Ondanks het feit dat de finitistic approach zeer intuïtief aandoet, lijken onze resultaten—met name voorbeelden [3] en [4]—een serieuze kritiek op deze aanpak te impliceren. In het eerste voorbeeld selecteert elke variant van de finitistic approach een Nash evenwicht dat niet limiet toelaatbaar is. Het tweede voorbeeld beschrijft een compleet gemengd (dus automatisch trembling hand perfect) Nash evenwicht dat niet finitistisch perfect is. Verdere voorbeelden dienen ter illustratie van de relaties tussen de twee verschillende benaderingen van het perfecte evenwicht, en de relatie tot toelaatbaarheid en ongedomineerdheid van strategieën.

In zogeheten second price veilingen met particuliere waarderingen voor de bieders heeft iedere bieder een dominante strategie waarin hij zijn persoonlijke waardering voor het object biedt. Echter, in een second price veiling met incomplete informatie en onderling afhankelijke waarderingen hebben bieders niet altijd een dominante strategie, terwijl er veel evenwichten kunnen zijn in een dergelijke veiling. Dit creëert de noodzaak om een instrument te ontwerpen om in zulke zogeheten Bayesiaanse spelen de minder intuïtieve evenwichten uit te sluiten. Met dit doel voor ogen ontwikkelen we in hoofdstukken 3 en 4 het begrip trembling hand perfect evenwicht voor Bayesiaanse spelen met oneindige type en actie ruimten, ter verfijning van de verzameling Bayesiaanse Nash evenwichten.

In hoofdstuk 3 baseren we ons onderzoek op zogeheten gedrag strategiën. Een centraal oplossingsconcept is het begrip Bayesiaans Nash evenwicht (BNE), een directe generalisatie van het Nash evenwicht. Een BNE is een profiel van gedrag strategieën, een voor elke speler, zó, dat de strategie van een speler, gegeven zijn type, in verwachte waarde een beste antwoord is op de strategieën van de tegenspelers, waarbij in de verwachte waarde alle mogelijke typen van de tegenspelers in beschouwing moeten worden genomen. Anders gezegd, de beste-antwoord eigenschap van het evenwicht wordt op interim niveau geëist, als een speler al weet wat zijn type is. Ons doel in dit hoofdstuk is om een formele definitie te geven van perfect BNE in Bayesiaanse spelen, en de eigenschappen daarvan in kaart te brengen. Als eerste stap definiëren we perfectie voor een gedrag strategie, dus niet noodzakelijk voor een BNE. We beschouwen drie varianten van perfectie, die verschillen in het convergentiebegrip dat gehanteerd wordt over de type ruimten. Kort gezegd is het centrale idee om een gedrag strategie β perfect te noemen als er een rij $(\beta^k)_{k=1}^{\infty}$ compeet gemengde strategieën bestaat zó, dat voor elke speler i de afstand tussen β_i^k en β_i en de afstand tussen β_i^k en de beste antwoorden tegen β^k beide naar nul convergeren. Met convergentie bedoelen we hier convergentie in de actie ruimte met betrekking tot de zwakke metriek, en convergentie in de type ruimten in één van de volgende drie betekenissen: uniform voor alle typen, puntsgewijs voor elk type, en puntsgewijs voor bijna elk type. In het algemeen is een dergelijk profiel β niet per sé een BNE. Als β ook nog een BNE is, dan noemen we β uniform-perfect, puntsgewijs-perfect, of b.o.-puntsgewijs perfect. We geven een gedetailleerde analyse van elk van deze drie versies van perfect BNE, en bespreken de relaties tussen deze begrippen. We beschouwen ook enkele speciale gevallen, zoals compactheid van type en actie ruimten, en continuiteit van de uitbetalingsfuncties.

In hoofdstuk 4 beschouwen we Bayesiaanse spelen met n spelers waar de type ruimte van elke speler een separabele metrische ruimte is. Zodra spelers hun type kennen, dienen ze gelijktijdig een actie uit een compacte metrische ruimte te kiezen, waarna elke speler een uitbetaling ontvangt die af kan hangen van zowel de typen van de spelers als de acties die ze hebben gekozen. Zoals in Milgrom en Weber (1985) veronderstellen we dat de a priori kansverdeling op het product van de type ruimten absoluut continu is in relatie tot het product van de resulterende marginale kansen. We nemen ook aan dat de uitbetalingen equicontinu zijn. Milgrom en Weber (1985) bewijzen dat er in dit geval minstens een evenwicht in distributie strategieën bestaat. Aangezien het niet duidelijk is hoe spelers een distributie strategie dienen te spelen, definiëren we een analoog begrip voor gedrag strategieën. Een gedrag strategie wordt een distributie evenwicht genoemd als de resulterende distributie strategieën een evenwicht vormen.

Om het begrip trembling hand perfect evenwicht te generaliseren naar Bayesiaanse spelen, definiëren we in dit hoofdstuk het distributie perfect evenwicht als een gedrag strategie profiel wiens resulterende distributie strategie profiel voldoet aan de voorwaarden voor het trembling hand perfect evenwicht. We bewijzen dat voor bovenstaande klasse van Bayesiaanse spelen distributie perfectie een verfijning is van het distributie evenwicht. Ook bewijzen we dat een distributie perfect evenwicht bestaat, en dat de verzameling distributie perfecte evenwichten rijgesloten is in Tychnoff topologie, indien we de verzameling van kansmaten op de actie ruimten topologiseren met de sterke topologie.

We benadrukken dat de aanpak in hoofdstuk 3 om perfecte evenwichten te definiëren natuurlijker is dan de methode die we hanteren in hoofdstuk 4. Echter, om de theorie van perfectie te ontwikkelen, en met name om existentie van perfecte evenwichten te bewijzen, is het eenvoudiger om de tweede aanpak in hoofdstuk 4 te gebruiken dan de eerste in hoofdstuk 3.

Verder, in beide hoofdstukken, gebruiken de deze methoden in de context van symmetrische sealed-bid second-price veilingen met onderling afhankelijke waarderingen, en laten zien dat perfectie een specifiek type evenwicht selecteert, en de minder natuurlijke evenwichten uitsluit. Verder merken we op dat in deze veilingen de bieders geen dominante strategieën hebben, en dat er een groot aantal evenwichten in ongedomineerde strategieën bestaat.

Preciezer gezegd, in hoofdstuk 3 beschouwen we een second price veiling waarin voor elke $i = 1, 2$ de waardering voor bieder i wordt gegeven door $v_i = 5 + t_i - \alpha t_j$, met $\alpha \in (0, 1)$ en $j \neq i$. Er zijn veel BNEs in deze veiling, maar we laten zien dat perfectie een BNE β selecteert die uniek is binnen een klasse van strategieën, en de minder natuurlijke evenwichten uitsluit. We benadrukken dat de keuze van de rij gedrag strategie profielen $(\beta^k)_{k=1}^{\infty}$ een subtiele zaak is, aangezien de meest voor de hand liggende kandidaat niet het gewenste resultaat geeft.

In hoofdstuk 4 beschouwen we een symmetrische second price veiling met twee bieders waar de waardering van bieder i voor het object af kan hangen van beide typen. Deze waardering wordt aangeduid met $v_i(t_1, t_2)$ en heeft de volgende eigenschappen:

(1) $v_1(t_1, t_2) = v_2(t_2, t_1)$.
(2) v_i is continu differentieerbaar.
(3) v_i is strikt stijgend in t_i and stijgend in t_j voor $j \neq i$.

We gebruiken distibutie perfectie in deze veiling om een kleinere verzameling evenwichten te verkrijgen, en de contra-intuïtieve evenwichten uit te sluiten.