

Network formation games

Citation for published version (APA):

Tennekes, M. (2010). *Network formation games*. Maastricht University.

Document status and date:

Published: 01/01/2010

Document Version:

Publisher's PDF, also known as Version of record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.umlib.nl/taverne-license

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

repository@maastrichtuniversity.nl

providing details and we will investigate your claim.

Samenvatting

Dit proefschrift behandelt wiskundige modellen van netwerkformatie. Hierbij gaat het om zogenaamde endogene netwerken, dat wil zeggen, netwerken die worden gevormd door individuen die vertegenwoordigd worden door knopen. Een voorbeeld hiervan is een vriendschapsnetwerk, waarin een verbinding correspondeert met de vriendschap tussen twee personen. De personen formeren zelf een vriendschapsnetwerk door onderlinge vriendschappen te sluiten. Een ander voorbeeld is een handelsnetwerk, waarin een verbinding een handelsrelatie vertegenwoordigt tussen twee handelaren.

We zijn geïnteresseerd in het formatieproces van endogene netwerken. Om dit te onderzoeken, gebruiken we vereenvoudigde modellen uit de speltheorie. Deze modellen worden netwerkformatiespelen (*network formation games*) genoemd. De agenten, die corresponderen met de knopen, leggen verbindingen volgens een bepaalde procedure. Aan het einde van deze procedure ontvangt elke agent een bepaalde uitbetaling aan de hand van het uiteindelijk gevormde netwerk. Centrale onderzoeksvragen die worden gesteld in dit proefschrift zijn: onder welke voorwaarden bestaan evenwichtsnetwerken (d.w.z. netwerken waarbij geen één agent zich kan verbeteren) en indien ze bestaan, welke topologie hebben ze? Verder onderzoeken we welke procedures tot evenwichtsnetwerken leiden.

Als basismodel in Hoofdstukken 2 tot en met 7 gebruiken we het unilaterale verbindingmodel (*unilateral connections model*), dat is ontwikkeld door Bala en Goyal (2000a). De agenten formeren een netwerk door simultaan een verzameling gerichte verbindingen te kiezen, waarbij elke agent alleen kan kiezen uit de verbindingen die naar hem gericht zijn. Alle gekozen verbindingen vormen samen het uiteindelijke netwerk. Op basis van dit netwerk ontvangt elke agent een bepaalde uitbetaling. Een verzameling verbindingen die een agent kiest, wordt een *actie* genoemd. Een actie van een bepaalde agent wordt een *beste antwoord* genoemd wanneer hij, gegeven de acties van alle andere agenten, de hoogst mogelijke uitbetaling ontvangt. Een *Nash* netwerk is een netwerk waarin iedere speler een beste antwoord speelt, en een *strikt Nash* netwerk is een netwerk waarin iedere speler een uniek beste antwoord speelt.

In Hoofdstuk 2 bestuderen we het eenrichtingsstroommodel (*one-way flow model*), dat wordt gekenmerkt door de volgende uitbetalingsfunctie: iedere agent betaalt bepaalde kosten voor elke verbinding die hij heeft gelegd en ontvangt bepaalde opbreng-

sten van andere agenten. Deze opbrengsten zijn niet rivaliserend, dat wil zeggen dat wanneer een agent ze doorgeeft aan anderen, dan heeft hij er nog steeds beschikking over. Als voorbeeld hiervan kan gedacht worden aan informatie. In het eenrichtingsstroommodel ontvangt agent i opbrengsten van agent j als er een gericht pad is van j naar i ; de opbrengsten stromen als het ware naar i toe.

Hoofdstuk 2 richt zich op het bestaan en de topologie van Nash netwerken. We leveren twee verschillende bewijzen voor het bestaan van Nash netwerken waarbij verbindingen, die tot dezelfde eigenaar behoren, gelijke kosten hebben. Met een tegenbeeld laten we zien dat Nash netwerken niet altijd bestaan voor spelen met heterogene verbindingskosten. We laten zien dat Nash netwerken wel bestaan onder bepaalde condities. Tevens karakteriseren we de topologie van Nash netwerken en strikt Nash netwerken voor homogene en heterogene verbindingskosten. Ook beschouwen we spelen waarbij opbrengsten negatief kunnen zijn. Dit houdt in dat er bijvoorbeeld ongewenste informatie door een netwerk kan circuleren. Voor deze spelen laten we zien dat efficiënte netwerken (waarin de totale uitbetaling maximaal is) niet altijd Nash netwerken zijn. Bovendien laten we zien dat Nash netwerken niet altijd bestaan, zelfs wanneer de verbindingskosten homogeen zijn. We besluiten Hoofdstuk 2 met een overzicht van de resultaten die betrekking hebben op het eenrichtingsstroommodel.

Het vinden van beste antwoorden in het eenrichtingsstroommodel wordt bestudeerd in Hoofdstuk 3. We bewijzen dat dit probleem, genaamd het beste-antwoord-probleem (*best response problem*), NP-moeilijk is, wat min of meer wil zeggen dat een oplossing niet efficiënt te berekenen is. Hierbij gebruiken we een methode waarbij elke instantie van het bekende NP-moeilijke probleem minimale verzamelingsdekking (*minimum set cover*) vertaald kan worden naar een instantie van het beste-antwoord-probleem.

We introduceren een algoritme, genaamd ARRAC, om een beste antwoord te vinden en vergelijken dit met BRUTE-FORCE (brute kracht), een algoritme dat voor iedere mogelijke actie de uitbetaling berekent om zodoende een beste antwoord eruit te kiezen. Algoritme ARRAC is gebaseerd op drie technieken om het mogelijk aantal acties te reduceren. De tijdscomplexiteit van ARRAC is identiek aan die van BRUTE-FORCE. Echter, door middel van experimenten laten we zien dat ARRAC wel degelijk efficiënter is. Tenslotte bestuderen we het beste antwoord probleem met betrekking tot het tweerichtingsstroommodel (*two-way flow model*). In dit model ontvangt agent i opbrengsten van agent j als er een ongericht pad is tussen i en j . Aan de hand van een algoritme laten we zien dat dit probleem in polynomiale tijd oplosbaar is.

In Hoofdstuk 4 wordt het unilaterale verbindingsmodel aangepast door de acties van de agenten te beperken tot *lokale acties*, welke zijn: het toevoegen, verplaatsen of verwijderen van één verbinding, of niets doen. Een *lokaal-Nash netwerk* wordt gedefinieerd als een netwerk waarin niemand een lokale verbeteractie kan uitvoeren. Een netwerk dat in Hoofdstuk 2 een Nash netwerk werd genoemd, wordt nu een *globaal-Nash netwerk* genoemd.

We introduceren axiomatische uitbetalingseigenschappen die geïnspireerd zijn op het eenrichtingsstroommodel. Voor uitbetalingsfuncties die aan enkele van deze ei-

genscapen voldoen, bewijzen we dat lokaal-Nash netwerken die *proper* zijn, d.w.z. waarin iedere agent hoogstens één uitgaande verbinding heeft, ook globaal-Nash zijn. Daarna bewijzen we de existentie van lokaal-Nash netwerken voor uitbetalingsfuncties die aan het raamwerk van eigenschappen voldoen. Met een voorbeeld tonen we aan dat ook niet-propere netwerken lokaal-Nash kunnen zijn. We bewijzen dat de uitbetalingseigenschappen onafhankelijk van elkaar zijn. Tenslotte relateren we het raamwerk van uitbetalingseigenschappen aan het eenrichtingsstroommodel en geven we een aantal voorbeelden van uitbetalingsfuncties die niet tot het eenrichtingsstroommodel behoren, maar die wel voldoen aan alle eigenschappen.

Een dynamisch spel, waarin agenten om beurten lokale acties spelen, wordt bestudeerd in Hoofdstuk 5. Het spel begint met een willekeurig netwerk. Dan wordt er willekeurig een agent geselecteerd, die een lokale actie mag spelen. Dit wordt herhaald totdat een netwerk wordt bereikt dat niemand wil veranderen. Iedere agent krijgt een uitbetaling op basis van dit uiteindelijke netwerk. De vraag die wordt gesteld in dit hoofdstuk, is of het spel altijd eindigt, met andere woorden, of er een netwerk wordt bereikt waarin niemand een lokale verbeteractie kan spelen. Om deze vraag te beantwoorden, bestuderen we een procedure van willekeurig geselecteerde lokale acties. We bewijzen dat deze procedure altijd eindigt als aan alle uitbetalingseigenschappen uit Hoofdstuk 4 wordt voldaan. Het netwerk dat uiteindelijk wordt bereikt is lokaal-Nash en tevens globaal-Nash.

In Hoofdstuk 6 worden de uitbetalingseigenschappen uit Hoofdstuk 4 gerelateerd aan het eenrichtingsstroommodel. We geven een volledige karakterisering van de uitbetalingsfuncties van het eenrichtingsstroommodel die voldoen aan alle eigenschappen uit Hoofdstuk 4. Hierbij beschouwen we uitbetalingsfuncties waarbij verbindingskosten en opbrengsten negatief mogen zijn. We laten zien dat een deelklasse van functies met heterogene verbindingskosten en opbrengsten aan de eigenschappen voldoet waarvoor we het bestaan van lokaal-Nash netwerken hebben bewezen. Verder laten we zien dat elke functie met homogene niet-negatieve verbindingskosten en heterogene niet-negatieve opbrengsten voldoet aan alle eigenschappen.

Het tweerichtingsstroommodel (*two-way flow model*) wordt bestudeerd in Hoofdstuk 7. Het enige verschil met het eenrichtingsstroommodel is dat agent i opbrengsten ontvangt van agent j als er een ongericht pad is tussen i en j . In Hoofdstuk 7 gebruiken we dezelfde aanpak als in Hoofdstuk 4. Eerst bewijzen we dat voor uitbetalingsfuncties die aan bepaalde axiomatische eigenschappen voldoen, minimale lokaal-Nash netwerken ook globaal-Nash zijn. Met een minimaal netwerk bedoelen we dat de ongerichte versie ervan geen enkele cykel bevat. Daarna bewijzen we de existentie van minimale lokaal-Nash netwerken voor uitbetalingseigenschappen die aan een raamwerk van eigenschappen voldoen. We laten zien dat uitbetalingsfuncties waarbij de verbindingen, die tot dezelfde eigenaar behoren, gelijke kosten hebben en waarbij de opbrengsten negatief kunnen zijn, aan alle eigenschappen voldoen. Tevens geven we een aantal voorbeelden van uitbetalingsfuncties die niet tot het tweerichtingsstroommodel behoren, maar die wel voldoen aan alle eigenschappen.

In Hoofdstuk 8 bestuderen we een model waarin de financiering van een groot project door een groep agenten wordt onderzocht. Dit grote project bestaat uit een verzameling taken, die bepaalde kosten met zich meebrengen. Omdat deze kosten aan elkaar gerelateerd zijn, definiëren we een kostenfunctie op de verzameling projecten (hierbij is een project een deelverzameling taken). Tevens levert het uitgevoerde project bepaalde opbrengsten op voor iedere agent. De vraag is of de agenten bereid zijn te investeren in het grote project. Om dit te onderzoeken, laten we elke agent per taak een investering voorstellen. Een project kan alleen worden uitgevoerd als de kosten ervan betaald kunnen worden met de voorgestelde investeringen.

We geven condities waarvoor investeringsprofielen bestaan waarmee het grote project betaald kan worden en waarbij niemand profiteert door af te wijken. Wanneer aan deze condities wordt voldaan, worden de investeringen *stabiel* genoemd. We laten zien hoe stabiliteit gerelateerd is aan het Nash evenwichtsconcept. Als voorbeeld van ons model beschrijven we een situatie waarin onderzocht wordt of er voldoende animo aanwezig is voor het bouwen van een buurtcentrum.

Alhoewel het model in hoofdstuk 8 op het eerste zicht weinig met netwerkformatie te maken lijkt te hebben, is het gebaseerd op een model van netwerkformatie dat is onderzocht door Bloch en Jackson (2007). In dat model formeren de agenten een netwerk door investeringen voor te stellen per verbinding.

In Hoofdstuk 9 besluiten we dit proefschrift met een bespreking van uitbreidingen op het unilaterale verbindingsmodel en doen we aanbevelingen voor verder onderzoek.

In de literatuur is het unilaterale verbindingsmodel op de volgende twee manieren uitgebreid. De eerste uitbreiding is dat opbrengsten die een agent ontvangt van een andere agent in waarde afnemen met de lengte van het verbindingspad tussen hen (gemeten in het aantal verbindingen). De tweede uitbreiding is dat elke verbinding functioneert met een bepaalde betrouwbaarheidskans. We relateren de uitbetalingseigenschappen die we in Hoofdstukken 4 en 7 van dit proefschrift hebben voorgesteld aan deze uitbreidingen.

We eindigen Hoofdstuk 9 met een aantal aanbevelingen voor verder onderzoek. In dit proefschrift en in de meeste relevante literatuur wordt verondersteld dat de agenten volledig rationeel handelen en bovendien wordt verondersteld dat ze volledige kennis hebben van de omgeving. Voor verder onderzoek zou het interessant zijn om deze aannames (deels) te laten vallen.