

The nature of minimax search

Citation for published version (APA):

Beal, D. F. (1999). *The nature of minimax search*. Universiteit Maastricht.

Document status and date:

Published: 01/01/1999

Document Version:

Publisher's PDF, also known as Version of record

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.umlib.nl/taverne-license

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

repository@maastrichtuniversity.nl

providing details and we will investigate your claim.

Summary

This treatise deals with one of the fundamental topics of intelligent behaviour in competitive environments – minimax. Minimax has a long history as both a theory of perfect evaluation of perfect-information two-sided competitive situations, and a foundation for algorithms that play games. The thesis comprises a collection of published contributions to the understanding of minimax search over a number of years, now revised and with modern references included.

Chapter 1 provides a brief history of minimax, focussing on attempts to understand why minimax search is effective in practice, and how that understanding may be used to increase the efficiency of minimax search.

Chapters 2 and 3 describe models of minimax for game trees that attempt to capture, in simplified form, the essential characteristics of minimax in practice. Chapter 2 illustrates that simple but apparently sensible models predict that minimax search is useless or worse. Chapter 3 shows that more sophisticated models that only apply to game trees having a certain property do predict the observed success of minimax search. Typical games do have the indicated property.

Chapters 4 and 5 discuss technical details of implementing minimax search. A mechanism for programming simple searches with an elegant unification of values and bounds on values, mapped onto a single numerical scale is given. More generally, a separate mechanism is given for keeping essential information about values and bounds discovered by more elaborate algorithms that utilise multiple types of evaluation.

Chapters 6 and 7 give examples of how practical instances of useful evaluation functions for game playing produce evaluations of varying reliability which benefit from the minimax mechanism for sophisticated searches presented in Chapter 4.

Chapter 8 provides a detailed case study of retrograde minimax. When a game tree becomes small or sufficiently tractable, it becomes conceivable to build a complete table giving the value of every configuration, by backwards minimax (as the original theory of minimax envisaged.) This Chapter investigates the possibility of performing minimax search and retrograde minimax using patterns instead of individual positions. Although this is highly attractive in the sense of greatly reducing the number of distinct cases to be examined, this case study reveals that continual acts of creativity are required in the processing of patterns.

Chapter 9 discusses the question of envelopes for effective minimax searches. Techniques for increasing search efficacy introduce selection into the search process and implicitly define a search boundary called here the search envelope. The cost-effectiveness of any minimax search is intimately linked to its search envelope, and the concept of search envelope is helpful in discussing different algorithms.

Chapter 10 presents a major contribution. A domain-independent technique for efficient selective search is presented, together with insight into why it is effective. The technique is called null-move quiescence and has been widely used in game-playing programs. Special cases of the algorithm are known under other names. The effect of the null move is to establish (at low cost) bounds on the values that a larger minimax search would obtain. Experimental results are given which illustrate the gains attainable from the technique.

The conclusion of the thesis is that analysis of models of minimax, in terms of both theory and practical algorithms, has yielded greater understanding of minimax search, and considerable improvements to practical algorithms. Finally, it also concludes that further work could yield further benefits.

Samenvatting

Dit proefschrift behandelt een van de fundamentele onderwerpen in competitieve omgevingen: het minimax-principe. Minimax heeft een lange geschiedenis zowel als het gaat om de theorie van de volmaakte waardering van met elkaar wedijverende toestandsbeschrijvingen van twee partijen die beide over volledige informatie beschikken, als waar het gaat om het fundamentele raamwerk voor spelalgoritmen. Het proefschrift bevat een verzameling van gepubliceerde bijdragen die in de afgelopen jaren het begrip van het minimax-zoekproces hebben verdiept; de bijdragen zijn volledig herzien en aangevuld met recente referenties.

Hoofdstuk 1 geeft een kort historisch overzicht van minimax. Het richt zich vooral op de pogingen om te begrijpen waarom het minimax-zoekproces zo effectief is in de praktijk en hoe het begrijpen ervan kan worden gebruikt om de efficiency van het minimax-zoekproces te verhogen.

De hoofdstukken 2 en 3 beschrijven modellen van het minimax-zoekproces voor spelbomen; de modellen proberen in vereenvoudigde vorm de wezenlijke karakteristieken van het minimax-zoekproces in de praktijk vast te leggen. Hoofdstuk 2 laat zien dat eenvoudige maar duidelijk gevoelige modellen voorspellen dat het minimax-zoekproces zinloos is of nog erger. Hoofdstuk 3 toont aan dat meer verfijnde modellen, die alleen worden toegepast op spelbomen die een bepaalde eigenschap hebben, de waargenomen successen van minimax inderdaad voorspellen. We merken op dat de gebruikelijke spelen de hierboven bedoelde eigenschap bezitten.

De hoofdstukken 4 en 5 gaan in op de technische details van het implementeren van het minimax-zoekproces. Er wordt een mechanisme beschreven voor het programmeren van eenvoudige zoekprocessen met een elegante unificatie van waarden en grenzen van waarden, die afgebeeld worden op een enkelvoudige numerieke schaal. Er wordt ook een afzonderlijk mechanisme beschreven dat meer in het algemeen wezenlijke informatie bijhoudt over waarden en grenzen, die ontdekt zijn door ingewikkelde algoritmen met behulp van verschillende manieren van evalueren.

De hoofdstukken 6 en 7 laten met voorbeelden zien hoe een praktische invulling

van gewone evaluatiefuncties voor spelprogramma's waarderings opleveren met een uiteenlopende betrouwbaarheid; de verfijnde mechanismen voor het minimax-zoekproces zoals beschreven in hoofdstuk 4 toont de voordelen aan van het gebruik van het begrip betrouwbaarheid.

Hoofdstuk 8 beschrijft een gedetailleerde *case study* van het retrograde minimax-zoekproces. Wanneer een spelboom klein of voldoende handelbaar is, wordt het aanvaardbaar om een volledige tabel te maken die de waarde van elke configuratie bevat; dit gebeurt door een achterwaarts minimax-zoekproces (precies zoals dat in de oorspronkelijke minimax-theorie bedoeld was). Het hoofdstuk onderzoekt de mogelijkheid om het minimax-zoekproces en het retrograde minimax-zoekproces uit te voeren met gebruikmaking van patronen in plaats van individuele stellingen. Hoewel dit idee bijzonder aantrekkelijk is in de zin dat het aantal verschillende gevallen aanzienlijk verminderd wordt, toont de *case study* aan dat een voortdurend creatief handelen noodzakelijk is in het proces om tot een verantwoorde verzameling van patronen te komen.

Hoofdstuk 9 behandelt de vraag of er een omhullend proces bestaat voor een effectief minimax-zoekproces. De technieken die ontwikkeld zijn om de effectiviteit van het zoekproces te verhogen introduceren selectief zoeken in het zoekproces en definiëren impliciet een grens voor elk zoekproces; deze grens noemen we hier de omhullende van een effectief zoekproces (*the search envelope*). De kosten-effectiviteit van elk minimax-zoekproces is nauw verbonden met de *search envelope*. Het concept van de *search envelope* is derhalve nuttig in een vergelijking met verschillende andere algoritmen.

Hoofdstuk 10 bevat een belangrijke bijdrage. Er wordt een domein-onafhankelijke techniek voor efficiënt selectief zoeken beschreven, tesamen met het inzichtelijk maken waarom deze techniek effectief is. De techniek wordt *null-move quiescence* genoemd en wordt hedentendage wijd en zijd toegepast in spelprogramma's. Bijzondere varianten van de algoritme zijn bekend onder andere namen. Het effect van de *null-move* algoritme is om op goedkope wijze de grenzen van de waarden die een uitgebreid minimax-zoekproces zou opleveren, vast te stellen. Er worden experimentele resultaten gegeven die de opbrengsten illustreren die verkrijgbaar zijn met deze techniek.

De conclusie van het proefschrift is dat een analyse van de minimax-modellen zowel in termen van de minimax-theorie als in termen van praktische algoritmen, geleid heeft tot een groter inzicht in het minimax-zoekproces en tot aanzienlijke verbeteringen in praktische algoritmen. Tenslotte concludeert de auteur dat het werk voortgezet kan worden omdat meer resultaten bereikbaar zijn door een verdere analyse van het minimax-zoekproces.