

Time-varying spectral analysis on Hilbert spaces

Citation for published version (APA):

van Delft, A. M. N. (2016). *Time-varying spectral analysis on Hilbert spaces: theory and practice*. Universitaire Pers Maastricht.

Document status and date:

Published: 01/01/2016

Document Version:

Publisher's PDF, also known as Version of record

Document license:

Unspecified

Please check the document version of this publication:

- A submitted manuscript is the version of the article upon submission and before peer-review. There can be important differences between the submitted version and the official published version of record. People interested in the research are advised to contact the author for the final version of the publication, or visit the DOI to the publisher's website.
- The final author version and the galley proof are versions of the publication after peer review.
- The final published version features the final layout of the paper including the volume, issue and page numbers.

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal.

If the publication is distributed under the terms of Article 25fa of the Dutch Copyright Act, indicated by the "Taverne" license above, please follow below link for the End User Agreement:

www.umlib.nl/taverne-license

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at:

repository@maastrichtuniversity.nl

providing details and we will investigate your claim.

Nederlandse samenvatting

Veel fysische verschijnselen vertonen niet-stationair gedrag ten gevolge van geleidelijke veranderingen over tijd in de tweede-orde afhankelijkheidsstructuur. Voorbeelden zijn te vinden in een groot aantal verschillende wetenschappelijke disciplines zoals in de geofysica, geneeskunde, economie en ingenieurswetenschappen. Bovendien kunnen veel moderne datasets, die mogelijk onderhevig zijn aan dit type gedrag, gezien worden als processen die variëren over een continuüm. In dit proefschrift staan stochastische processen centraal die gekarakteriseerd kunnen worden door beide aspecten. Met andere woorden, dit proefschrift is gewijd aan het ontwikkelen van theorie en methodologie voor de analyse van stochastische processen waarvan de afhankelijkheidsstructuur van de tweede-orde, en dus de spectrale karakteristieken, veranderen over tijd. De elementen van het stochastische proces worden verondersteld waarden aan te nemen op een separabele Hilbert-ruimte en zijn dus van een intrinsiek oneindige dimensie.

Een stochastisch proces – een evolutie proces dat bestaat uit een reeks geordende toevalsvariabelen – wordt zwak stationair genoemd of stationair van de tweede-orde wanneer de eerste twee momenten van de afhankelijkheidsstructuur, d.w.z. de verwachting en covariantie, niet tijdsafhankelijk zijn. Een zwak stationair stochastisch proces kan alternatief worden weergegeven als een stochastisch signaal met willekeurige amplitudes and fases die zelf tijdsonafhankelijk zijn. Deze decompositie in termen van harmonische trillingen met tijd constante coëfficiënten wordt ook wel de spectrale representatie van het proces genoemd. Het bijbehorende spectrum of spectrale dichtheidsfunctie van het proces – de Fourier transformatie van de covariantie structuur – geeft informatie over hoe de energie in het proces verdeeld is, of wordt afgegeven, over verschillende frequenties.

Ondanks het feit dat het duidelijk is dat de tweede-orde afhankelijkheidsstructuur in vele gevallen wel degelijk verandert over tijd, is het merendeel van de statistische methoden die alledaags worden toegepast gebaseerd op de aanname van een onderliggend tijdsinvariant generatiemechanisme. Wanneer de tweede-orde afhankelijkheidsstructuur tijdsafhankelijk is, houdt het postulaat van zwakke stationariteit niet. Dit heeft twee belangrijke gevolgen. Ten eerste is een spectrale representatie van het proces waarbij de fysische interpretatie van ‘frequentie’ en ‘energie’ behouden blijft, niet per se definieerbaar. Ten tweede is een alternatieve asymptotische theorie noodzakelijk voor betekenisvolle statistische inferentie.

Voor niet-stationaire processen waarvan de elementen waarden aannemen in Euclidische ruimtes, is er een raamwerk (Dahlhaus, 1996a) geïntroduceerd die zowel een betekenisvolle statistische inferentie mogelijk maakt alsmede een spectraal theo-

rie waarin concepten als ‘frequentie’ and ‘energie’ behouden blijven. Dit raamwerk heeft de weg vrij gemaakt voor toenemend onderzoek naar processen waarvan de afhankelijkheidsstructuur onderhevig is aan veranderingen over tijd. Veel problemen zijn echter tot op heden onopgelost gebleven. Een belangrijk probleem in de praktijk is het schatten van het tijdsafhankelijk spectrum. Omdat deze functie niet alleen afhangt van frequentie maar ook van tijd en theoretische resultaten niet direct toepasbaar zijn, is men in de praktijk geconfronteerd met het onzekerheidsprincipe. Een balans moet daarbij gevonden worden tussen de benodigde precisie in beide richtingen, waarbij meer schattingsprecisie in de ene richting ten koste gaat van de schattingsprecisie in de andere richting.

Een ander zeer urgent probleem doet zich voor als gevolg van recente technologische ontwikkelingen. Ook al variëren veel fysische verschijnselen over een continuüm zoals over een kromme of een oppervlakte, pas zeer recente ontwikkelingen hebben het mogelijk gemaakt om deze processen waar te nemen op willekeurig hoge frequenties. De hierdoor toenemende vraag naar methodologie die de onderzoeker in staat stelt om informatie te extraheren en conclusies te trekken uit data die gezien kunnen worden als steekproefsgewijze metingen van complex wiskundige structuren, is het brandpunt van functionale data analyse. Het merendeel van de bestaande functionale data literatuur neemt aan dat de functionale observaties onafhankelijk en identiek verdeeld zijn. Net als voor stochastische processen waarvan de toevalsvariabelen waarden aannemen in eindig dimensionale vectorruimten, is het voor tijdreeksen van functionale data van groot belang om statistische methodes te ontwikkelen die niet alleen rekening houden met de inherente afhankelijkheidsstructuur, maar ook met het feit dat deze structuur zeer waarschijnlijk verandert over tijd. Tot nu toe zijn er echter enkel statistische methoden en instrumenten ontwikkeld onder het postulaat van zwakke stationariteit.

Bovengenoemde problemen vormen de kern van het gedane onderzoek in dit proefschrift. In het eerste gedeelte (Hoofdstuk 2) van dit proefschrift wordt een data-adaptieve methode ontwikkeld voor de schatting van spectra van niet-stationaire processen. Verondersteld wordt dat het niet-stationaire gedrag niet alleen veroorzaakt kan worden door geleidelijke veranderingen maar tevens door structurele veranderingen. De geïntroduceerde schattingstechniek is gemotiveerd vanuit het feit dat optimale bandbreedtes van de vensterfuncties in tijd- en frequentie richting, respectievelijk, afhangen van de gladheidseigenschappen van het ware onbekende spectrum in deze richtingen. In de praktijk zijn de optimale waarden van deze bandbreedtes niet direct toepasbaar. Tegelijkertijd is de schattingsprecisie sterk afhankelijk van de lokalisatie in tijd- en frequentie richting. Een data-adaptieve techniek om deze bandbreedtes optimaal te selecteren is tot nu toe een onopgelost probleem gebleven. Het streven is om hier een oplossing voor te vinden door een methode te introduceren die het mogelijk maakt om de optimale vorm van de vensterfunctie – beschouwd als een tweedimensionale functie in het tijd-frequentie vlak – op een data-adaptieve manier vast te stellen. Het onderliggende principe van het algoritme is om iteratief de bandbreedtes van de vensterfunctie uit te breiden totdat ‘homogeniteit’ wordt geschonden. Dit vindt plaats in de separatie fase die bewerkstelligd wordt door middel van een extra vensterfunctie, een sanctievenster. Dit sanctievenster

geeft minder of geen gewicht aan de coördinaten binnen de bandbreedtes die niet tot dezelfde homogene regio behoren als het coördinaat waarvoor de vensterfunctie wordt vastgesteld. Om volledige flexibiliteit te kunnen realiseren voor de graad waarmee de fluctuaties worden afgezwakt in de respectievelijke richtingen, worden de schattingen van de lokale spectrale coördinaten verwezenlijkt door de adaptieve vensterfuncties toe te passen op de pre-periodogram functie. Dit maakt het mogelijk om tegelijkertijd relatief hoge resolutie in tijd- en frequentie richting te kunnen verkrijgen. Dit is moeilijker te bewerkstelligen voor schatters die gebaseerd zijn op gesegmenteerde periodogram functies. De flexibiliteit die het pre-periodogram biedt gaat daarentegen gepaard met nadelige artefacten zoals het mogelijk aannemen van de pre-periodogram functie van negatieve waarden. Een specifieke functionaliteit van het algoritme, geïntegreerd in een stabiliteitsfase, is dat het dit nadelige effect kan beperken. Een simulatie studie is uitgevoerd om de prestatie van het algoritme te onderzoeken. De methode is vervolgens getoetst op neurowetenschappelijke data.

De noodzaak om voor functionale tijdreeksen de veronderstelling van zwakke stationariteit te kunnen afzwakken ligt ten grondslag aan het onderzoek in Hoofdstuk 3. Een theoretisch raamwerk wordt geïntroduceerd dat het mogelijk maakt om statistische inferenties te trekken van tijdreeksen van functionale data waarvan de onderliggende dynamieken veranderen over tijd. Het concept lokale stationariteit wordt gedefinieerd voor functionale tijdreeksen en een spectraal theorie wordt ontwikkeld. Meer specifiek, een tijdsafhankelijke functionale spectrale representatie wordt afgeleid en een klas van functionale processen wordt vastgesteld die gedefinieerd kunnen worden door middel van deze representatie. Vervolgens wordt bewezen dat deze klas voldoet aan de geïntroduceerde definitie van functionale lokale stationariteit. De notie van een tijdsafhankelijke spectrale dichtheidsoperator is geïntroduceerd en de eigenschappen onderzocht. Naar analogie met de multivariate tijdsreeksen kan dit object uniek gedefinieerd worden. Tijdsafhankelijke functionale ARMA processen worden bestudeerd in detail. Aangetoond wordt dat deze type processen behoren tot de geïntroduceerde klas en dus kunnen worden weergegeven via een tijdsafhankelijke functionale spectrale representatie. In deze analyse wordt onderscheid gemaakt tussen transfer operatoren – generalisaties van de Fourier transformaties van de reeks moving average matrices – die begrensd zijn in standaard operator norm en die begrensd zijn in Hilbert-Schmidt norm. Het raamwerk wordt in het laatste gedeelte van dit hoofdstuk toegepast om een schatter van de tijdsafhankelijke spectrale dichtheidsoperator te construeren. Deze schatter is gebaseerd om een functionale versie van een gesegmenteerde periodogram matrix. Eigenschappen als consistentheid en de asymptotische verdeling van deze schatter worden ten slotte in detail bestudeerd.

Wanneer de aanname van zwakke stationariteit niet geldig is, is de toepassing van de meeste statistische inferentie methodes die bestaan voor functionale tijdreeksen niet langer gepast. Dit kan namelijk resulteren in zware misspecificatie van modellen en daardoor tot incorrecte inferentie. Het is daarom uitermate belangrijk om een gepaste toets te ontwikkelen die het mogelijk maakt om na te gaan of de hypothese van temporele constantheid voor functionale tijdreeksen legitiem is. Hoofdstuk 4 is gewijd aan dit onderwerp en introduceert een spectraal domein-gebaseerde toets waarmee deze hypothese onderzocht kan worden. De toets gebruikt dat de functio-

nale Discrete Fouriertransformatie, wanneer geëvalueerd in afzonderlijke frequenties, een asymptotisch ongecorrleerde reeks vormt als en alleen als het proces functionaal zwak stationair is. De toetsingsgrootheid is gebaseerd op een empirische covariantie operator van deze functionale Discrete Fouriertransformaties, die vervolgens geprojecteerd wordt. De methodologie is theoretisch gerechtvaardigd door middel van asymptotische resultaten. De asymptotische eigenschappen van de toetsingsgrootheid worden afgeleid onder de nul- en de alternatieve hypothese van lokaal stationair functionale tijdreeksen. Hoofdstuk 4 bouwt daarmee voort op het theoretisch raamwerk dat geïntroduceerd werd in Hoofdstuk 3. Er worden geen structurele model aannames gemaakt behalve dan zwakke mixing voorwaarden in de vorm van functionale versies van de klassieke cumulant mixing voorwaarden. Een simulatie studie is uitgevoerd om de prestatie van de toetsingsgrootheid te onderzoeken in steekproeven van eindige populaties.