Rekenend denken

REKENEND DENKEN

Rede

in verkorte vorm uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van bijzonder hoogleraar in de Grondslagen van de Kennistechnologie vanuit de Theoretische Informatica aan de Faculteit der Algemene Wetenschappen van de Universiteit Maastricht op vrijdag 5 november 1999

door

A.J. van Zanten

Mijnheer de Rector Magnificus en overige leden van het College van Bestuur,
Leden van de R. Timman Stichting,
Dames en heren hoogleraren,
Leden van de familie Timman,
en voorts gij allen, die door uw aanwezigheid van uw belangstelling blijk geeft,

Zeer gewaardeerde toehoorders,

Op de uitnodigingskaart die u namens de Rector Magnificus van de Universiteit Maastricht mocht ontvangen wordt gesproken van een benoeming in de faculteit der Algemene Wetenschappen betreffende de Grondslagen van de Kennistechnologie vanuit de Theoretische Informatica. Niet alle trefwoorden in deze zin zullen u duidelijk zijn, vooral niet als u niet werkzaam bent bij deze universiteit of daar niet nauw bij bent betrokken. Voorts zullen sommigen van u gehoord hebben dat het hier een leerstoel betreft namens de R. Timman Stichting, een stichting die opgericht is binnen de Technische Universiteit Delft. Ook hierbij zullen velen onder u niet goed weten waar ze precies aan moeten denken. Een korte uitleg van een en ander zal daarom, denk ik, welkom zijn en ik zal mijn voordracht daarmee aanvangen.

DE R. TIMMAN STICHTING

In de na-oorlogse jaren begon er in Nederland de roep te klinken om opleidingen in de zogenaamde toegepaste wiskunde. Deze roep was aan universiteiten, met name aan de TH Delft (die, zoals u weet, toen nog niet de status van universiteit had), hoorbaar tijdens discussies betreffende het college-aanbod en bij de voorbereidingen van hoogleraarsbenoemingen. Het geven van propedeutisch onderwijs in de wiskunde had hier altijd voorop gestaan. Onderzoek in de wiskunde vond plaats aan andere faculteiten, zoals die van natuurkunde en van vliegtuigbouw, en was dan ingebed in de aldaar gevestigde disciplines. Ook vond er onderzoek plaats aan de zogeheten Onderafdeling Wiskunde. Deze onderafdeling echter had niet het recht aparte diploma's uit te reiken: er was geen afzonderlijke studierichting wiskunde waarin men kon afstuderen. Jaren van discussie over het instellen van een nieuwe ingenieursopleiding – die tot wiskundig ingenieur – gingen voorbij. Uiteindelijk, in september 1956 (officieus zelfs al in 1955) mocht de nieuwe studierichting officieel van start gaan. Dé grote man, de motor, achter de oprichting – zonder andere personen te kort te doen – was Professor Reinier Timman. Zijn specialisatie was, wat wij tegenwoordig noemen, de toegepaste analyse, d.w.z. differentiaal – en integraalrekening, differentiaal – en integraalvergelijkingen en met name de toepassingen van deze disciplines in modellen optredend in de vliegtuig- en scheepsbouwwereld. In die dagen behoorden deze tot de belangrijkste toepassingsgebieden van de wiskunde. Vanwege zijn specialisatie had Timman een duidelijke visie op de mogelijkheden van de nieuwe opleiding en, algemener, op de integratie van de wiskunde in andere vakgebieden.

Het is dus de naam van Timman die verbonden is aan de nieuwe leerstoel, hier aan de Universiteit Maastricht. De bijbehorende leeropdracht betreft de fundamenten van de Kennistechnologie vanuit de Theoretische Informatica. Deze omschrijving lijkt niet veel te maken te hebben met Timmans eigen werk, maar is toch niet ten onrechte gekozen, zoals ik hierna zal pogen duidelijk te maken. Sinds de zestiger jaren is de wiskunde een stuk opgeschoven, of laat ik mij wat voorzichtiger uitdrukken, uitgebreid in discrete richting. Grof gezegd bedoelt men daarmee dat naast systemen waarin het begrip 'continu' een hoofdrol speelt en waar de analyse met haar limietbegrip op wordt losgelaten, er steeds meer discrete objecten worden bestudeerd, waarbij men kan 'discretiseren', zoiets als aftellen of op een rijtje zetten. Bijna vanzelfsprekend is de computer hiervoor verantwoordelijk, althans voor een groot deel. Immers, alles wat zo'n machine doet is eindig en dat is zeker aftelbaar. Ook Timman had in zijn tijd reeds een open oog voor de mogelijkheden van rekenautomaten (zoals ze toen soms genoemd werden) binnen de wiskunde. In dit verband wil ik herinneren aan de zogenaamde Club van Rome. Dit gezelschap kreeg in 1971 wereldwijde bekendheid met het uitwerken van economische groeiscenario's met behulp van computermodellen. Timman was lid van dit illustere gezelschap. Hij maakte zich voorts sterk voor een opleiding tot informatica ingenieur. Ook die kwam er, en wel in 1981, maar zelf heeft hij dat niet meer mee mogen maken. Tot de dag van vandaag ziet men hem ook op dit terrein als een groot inspirator en herinnert men zich hem vanwege zijn duidelijkheid en enthousiasme. Timman was een soort mathematische omnivoor. Hij had ook veel belangstelling voor onderwerpen buiten zijn specialisaties. Zo gaf hij een college Discrete Optimaliseringsmethoden en kan hij als initiator beschouwd worden van de Operations Research groep binnen de Delftse Onderafdeling Wiskunde.

De R. Timman Stichting, opgericht binnen de TU Delft ter nagedachtenis van Professor Timman, heeft als één van haar doelstellingen bredere bekendheid te geven aan zijn baanbrekende werk betreffende nieuwe toepassingsgebieden verbonden met wiskunde en informatica.

De leerstoel die namens de R. Timman Stichting is ingesteld door de Universiteit Maastricht is hiervan een voorbeeld. De keuze van de studierichting Kennistechnologie is een logische keuze. Voorzover dat nu nog niet duidelijk is, zal het dat binnen enkele minuten wel worden. Dit betrekkelijk jonge vakgebied leent zich uitstekend voor toepassen en het verder uitdiepen van een aantal deelterreinen van de discrete wiskunde en de theoretische informatica.

KENNISTECHNOLOGIE

Inmiddels is het woord Kennistechnologie enige keren gevallen. Voor velen die niet aan deze universiteit werken een onbekend woord. Niet een woord dat direct associaties opwekt met een harde bèta-wetenschap, ondanks de tweede component 'technologie'. Misschien zelfs juist vanwege die component vermoedt menigeen hier een of andere gamma-discipline waarvan de beoefenaren het blazoen wat willen oppoetsen. Dit is echter onjuist. Ik zal voor u de min of meer officiële omschrijving van dit vakgebied oplezen:

"In het algemeen wordt binnen de Kennistechnologie op een adequate wijze omgegaan met domein-specifieke kennis: het coderen en vastleggen van feitelijke kennis, het modelleren van intuïtieve kennis, alsmede het in geïntegreerde vorm toepassen van deze kennis en het interpreteren hiervan".

Als bijna vanzelfsprekend steunt de Kennistechnologie op vier pijlers, te weten de Cognitiewetenschappen, de Kunstmatige Intelligentie, de Wiskunde en de Informatica. Gezien de aard van de in de Kennistechnologie gebruikte methoden en technieken en gelet op gebieden als codering en decodering van informatie, beveiliging van codes en patroonherkenning zal het (nu toch wel) duidelijk zijn dat Discrete Wiskunde en Theoretische Informatica hier een onderbouwende positie innemen. Met name de theorie van geordende codes, al of niet algebraïsch van aard, complexiteitstheorie van algoritmen, speltheorie, al of niet combinatorisch, zijn belangrijke bouwstenen voor de fundamenten van de Kennistechnologie. Omdat de zoëven opgenoemde onderwerpen al jaren in mijn onderzoeksbelangstelling staan, kan ik zeggen dat Kennistechnologie als woord misschien betrekkelijk nieuw klinkt, maar als onderzoeksgebied minder exotisch is dan sommigen onder u mogelijk gedacht hebben.
Ter illustratie van dit laatste wil ik u nog het volgende vertellen. Zo'n anderhalf jaar geleden vond in Delft een hergroepering van vakgroepen plaats. De leerstoel Algebra en Discrete Wiskunde, waar ik toe behoor, werd met delen van Informatica en Elektrotechniek samengevoegd tot een nieuwe vakgroep die aanvankelijk de naam Media en Kennistechnologie zou krijgen. Bij menig wiskundecollega maakte dit emoties los, omdat men zich daar niet in herkende. Het was in die tijd dat de positie in Maastricht in zicht kwam en u zult zich mijn verrassing kunnen voorstellen dat ik, die tot kort daarvoor vrijwel onbekend was met het woord Kennistechnologie, plotseling lid dreigde te worden van twee gezelschappen die dat in hun vaandel voerden.

Tot zover de historie. De Kennistechnologie is een jonge discipline en heeft daarom dus een kort verleden. Dit impliceert tevens dat er weinig over de toekomst valt te zeggen, althans ik begin daar niet aan.

Toekomstverwachtingen immers, zijn extrapolaties van hetgeen achter ons ligt en elke mathemaat kan uitleggen dat hoe minder steunpunten er zijn, hoe onnauwkeuriger de extrapolatie wordt. Liever wil ik het met u gedurende enige tijd over het heden hebben. Misschien komt dit wat prozaïsch over, maar wanneer ik het heden schets als het grensvlak van verleden en toekomst lijkt één en ander een filosofische onderbouwing te krijgen die aardig past in de setting van een bijeenkomst als deze.
Ik wil u iets vertellen over het onderzoek dat ik de afgelopen maanden heb verricht.

CARGO LOADING PROBLEM

Het Cargo Loading Problem is een bekend optimaliseringsprobleem dat vele varianten kent. Wij beschouwen de volgende versie.
Op een schip of in een vliegtuig staat een stapel dozen die genummerd zijn van 1 tot en met n. Doos 1 staat bovenop doos 2, die op zijn beurt bovenop doos 3 staat, enzovoort. Helemaal onderop staat doos n. De dozen moeten worden overgeladen op een of ander vervoermiddel, waar ze op dezelfde wijze opgestapeld moeten staan. Men mag slechts één doos tegelijk verplaatsen. Nooit mag een doos met een hoger nummer op een doos met een lager nummer staan. Als de dozen groter zijn naarmate ze een hoger nummer hebben kan men dus zeggen dat géén doos ooit op een kleinere mag staan. In de buurt van de beginstapel zijn een beperkt aantal locaties waar ook stapels kunnen staan en die men mag gebruiken bij het overladen. Het zal namelijk wel duidelijk zijn dat zonder hulpstapels er niet veel valt over te laden: als de beginstapel meer dan één doos bevat is het probleem onder de gestelde voorwaarden niet op te lossen zonder extra ruimte.
In figuur 1 ziet u een typische overlaadsituatie wanneer er in totaal vier stapels gebruikt mogen worden, namelijk de begin- en eindstapel en twee hulpstapels: het zogenaamde vier-stapel-probleem.

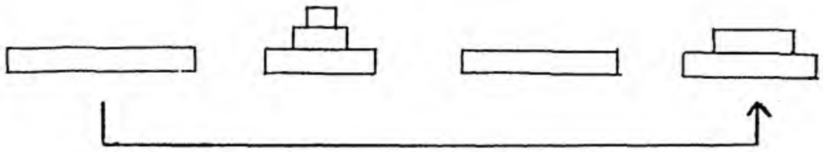

Fig. 1

In de praktijk zijn er vaak ook nog kosten verbonden aan het verplaatsen van de dozen (schadekosten bijvoorbeeld), die per doos kunnen verschillen, maar wij zien daar vanaf. Oplossingen van het door ons geschetste probleem kunnen als heuristiek gebruikt worden voor problemen die wat meer realistisch van aard zijn.
U zult opgemerkt hebben dat ik tot nu toe, enigszins krampachtig, het drie-stapel-probleem vermeden heb te noemen. Inderdaad, het ligt voor de hand om dit als eerste type overlaadprobleem te bekijken. Echter - en sommigen van u zullen het al herkend hebben - is dit een welbekend klassiek probleem, Torens-van-Hanoi geheten. De oplossing ervan is letterlijk een schoolvoorbeeld van een oplossingstechniek die als recursie te boek staat.

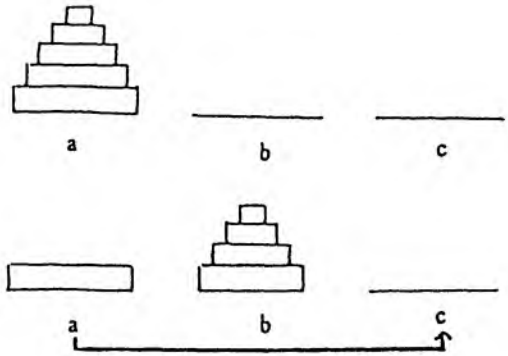

Fig. 2

Bovendien is dit probleem uitgangspunt voor vele generalisaties. Mensen die mij vaker een voordracht hebben horen geven, en mij wel eens eerder over dit inleidend voorbeeld gehoord hebben, zouden zich misschien afvragen of ik voor de gelegenheid niet eens met wat anders voor de dag had kunnen komen. Cargo Loading dus!

In figuur 2 moeten dozen van a naar c gebracht worden. We verplaatsen eerst de bovenste vier naar b (hoe dit moet zal ik zo vertellen), dan doos 5 naar c en vervolgens de vier dozen van b naar c. Ons oorsponkelijke probleem, om een stapel van vijf dozen te verplaatsen, hebben we dus teruggebracht naar het probleem om een stapel van vier te verplaatsen. Dit pakken we net zo aan. We verplaatsen eerst drie dozen naar c, doos 4 naar b en dan de drie dozen van c naar b, enzovoort. We gaan door tot we met stapels van één doos te maken hebben. En die kunnen we zeker verplaatsen! Dit is een voorbeeld van een recursieve oplossing. Hier gaat de recursie vier niveaus diep. Het probleem van vijf dozen wordt teruggebracht naar het soortgelijke probleem van vier dozen, dat van vier dozen naar het analogon met drie, van drie naar twee en tenslotte van twee naar één. Onnodig te zeggen dat een dergelijke oplossing 'onmenselijk' is. Rekenmachines kunnen vele niveaus diep 'denken', als ik dat woord hier mag gebruiken. De meeste mensen echter raken na drie niveaus de kluts kwijt. Om de stapel dozen over te laden heeft een mens een zogenaamde iteratieve algoritme nodig, dat wil zeggen een voorschrift dat hem precies vertelt hoe en in welke volgorde hij de dozen moet verplaatsen. De volgende rij getallen, doosnummers voorstellend, geeft de volgorde van verplaatsingen van de dozen behorend bij onze recursieve oplossing:

1 2 1 3 1 2 1 4 1 2 1 3 1 2 1 5 1 2 1 3 1 2 1 4 1 2 1 3 1 2 1

U zult zeggen dat hier niet bij staat op welke stapel een doos gezet moet worden. Dat klopt, maar de volgende eenvoudige regel geeft uitkomst. Doos 1 moet steeds de drie stapels a, b en c aandoen in de volgorde a, c, b, a, c, b, a, ... Voor de andere dozen heeft men geen keus. Deze moeten elke keer naar de enige stapel waar ze volgens de spelregels bovenop mogen liggen. Het totale aantal verplaatsingen is $31 = 2^5 - 1$. Men kan bewijzen dat dit het *minimale* aantal verplaatsingen is waarmee men een stapel van vijf dozen kan verplaatsen. U kunt misschien nu raden wat het minimale aantal verplaatsingen is voor een stapel van n dozen (dat willen wiskundigen altijd graag: algemeen en optimaal). Dat aantal is gelijk aan $2^n - 1$.
Voorts is u misschien een zekere regelmaat opgevallen in de verplaatsingsrij. Deze regelmaat of symmetrie wordt nog duidelijker als we de verschillende getallen voorstellen door verticale streepjes waarvan de lengtes gelijk zijn aan de bijbehorende getallen.

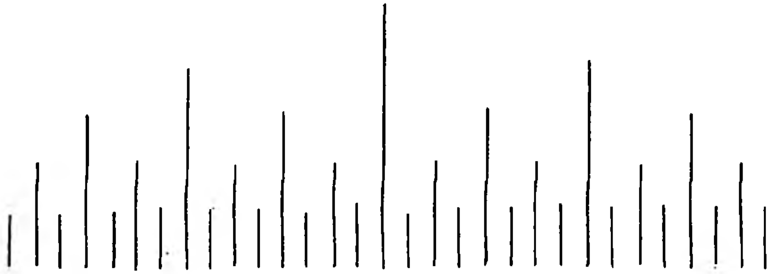

Fig. 3

De vorm van het gehele patroon keert terug, op een kleinere schaal, links en rechts van het midden. Hetzelfde vindt plaats als we afzonderlijk naar de linker– en rechterhelft kijken en ook weer als we die helften op hun beurt halveren. Dit is een manifestatie van het recursieve karakter van onze oplossingsmethode. Neemt men in plaats van vijf dozen een stapel van n dozen, n > 5, dan zal dit verschijnsel zich blijven herhalen. De gehele figuur vindt men telkens terug in delen van die figuur. Men noemt zoiets een *fractale figuur* of ook wel *fractal*.

LOPEND ONDERZOEK

Zoals ik reeds aankondigde is het mijn bedoeling u iets te vertellen over het heden. In deze context wil dat zeggen mijn eigen onderzoek van het laatste half jaar.

U zult begrepen hebben dat het vracht-laad-probleem met drie stapels volledig bekend is. Menig jongerejaarsstudent in de informatica of wiskunde is hiermee vertrouwd. Des te opmerkelijker is het dat het algemenere probleem met meer dan drie stapels *niet* is opgelost. Men zal denken dat hoe meer hulpstapels men mag gebruiken, hoe gemakkelijker het wordt om een stapel dozen te verplaatsen. Op zich is dit waar! Maar de vraag wat het kleinste aantal verplaatsingen is om dit doel te bereiken, is veel en veel moeilijker te beantwoorden. Zelfs voor vier stapels - het eerstkomende geval na drie - is het antwoord nog niet in de mathematische literatuur te vinden. Dit probleem nu, alsook een aantal verwante vragen, heeft mij de laatste maanden bezig gehouden. Voor het goede begrip zal ik het probleem nog eens precies formuleren.

Bepaal het minimale aantal verplaatsingen waarmee men een stapel van n dozen kan verplaatsen met gebruikmaking van twee hulplocaties, dus met vier stapels in totaal, onder de voorwaarden dat men slechts één doos tegelijk mag verplaatsen en dat nooit een grotere doos op een kleinere mag staan.

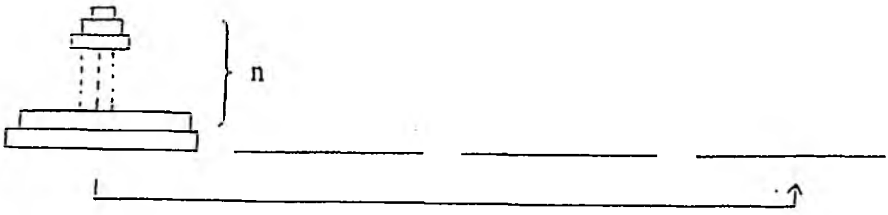

Fig. 4

De aanleiding om dit probleem te bestuderen was een artikel van U.K. Sarkar in de Proceedings of the International Conference on Knowledge Based Computer Systems (1998). De auteur bespreekt daarin een door hem ontworpen computerprogramma dat een stapel van n dozen verplaatst met gebruikmaking van k hulpstapels. Zijn algoritme is sneller - gebruikt minder verplaatsingen - dan alle andere algoritmen die men in de loop der jaren heeft ontworpen. De auteur vermoedt dat zijn algoritme optimaal is, dus dat zijn algoritme het gegeven probleem met een minimaal aantal verplaatsingen oplost. Hij geeft echter tevens toe dat niet te kunnen bewijzen. Zoiets is een regelrechte uitdaging aan de lezer: bewijs het vermoeden! Er was nog een tweede uitdaging. De gepubliceerde algoritme is zwaar recursief, zowel naar n als naar k. De vraag is dus hoe een iteratieve versie eruit ziet, een procedure die door een mens kan worden uitgevoerd. Nog een derde vraag diende zich aan. De auteur had geen eenvoudige gesloten uitdrukking kunnen geven voor het minimale aantal verplaatsingen, zoiets als $2^n - 1$ voor het geval met drie stapels.

Vanaf nu beperken we ons tot vier stapels. De aanpak in het genoemde artikel is dat eerst de deelstapel van de bovenste m dozen ($m<n$) verplaatst wordt naar een hulplocatie, dat daarna de deelstapel van de dozen m+1, m+2, ... n-1 verplaatst wordt naar de tweede hulplocatie en dat

vervolgens doos n naar zijn eindbestemming gaat (onderop de nog te vormen eindstapel dus). Hierna worden de twee hulpstapels in omgekeerde volgorde weer afgebroken, waarbij eerste en vierde stapel van rol wisselen. De eigenlijke hypothese van Sarkar is nu dat de snelste algoritme van dit type is. Dit impliceert dat men de (of beter een, want er kan meer dan één optimale algoritme bestaan) snelste algoritme verkrijgt door een geschikte m te zoeken. We vestigen er nog eens de aandacht op dat de algoritme recursief is, omdat het probleem voor een stapel van n dozen wordt verschoven naar het soortgelijke probleem van m dozen, waarbij m kleiner dan n is. Figuur 5 illustreert dit.

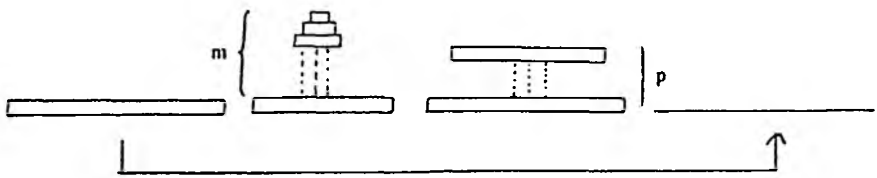

Fig. 5

Het aantal verplaatsingen nodig om een stapel van n dozen te verplaatsen noemen we a_n. Dit aantal zal behalve van n dus ook afhangen van de keuze van m. Bij de beschreven methode verplaatsen we eerst een stapel van m dozen, hetgeen, volgens onze afspraak, gebeurt door a_m keer een doos te verplaatsen. Vervolgens verplaatsen we een stapel van n–m–1 dozen, namelijk de dozen met nummers m+1, m+2, ... n–1. Hiervoor is maar één hulplocatie beschikbaar, omdat op de andere hulplocatie de dozen 1, 2, ..., m staan. Als we voor het gemak schrijven p=n-m–1, dan kost deze operatie 2^P–1 verplaatsingen. Nu wordt doos n verplaatst, gevolgd door het uitvoeren van alle eerdere verplaatsingen in omgekeerde volgorde, richting eindstapel.

Hopelijk zal u uit dit betoog duidelijk zijn geworden dat voor het gezochte aantal a_n geldt

$$a_n = a_m + 2^p - 1 + 1 + a_m + 2^p - 1 = 2a_m + 2^{p+1} - 1$$

Alweer is hier de recursie zichtbaar, omdat a_n wordt uitgedrukt in het kleinere getal a_m.
Om enig inzicht te krijgen in deze aantallen en in de mogelijkheden wat betreft de beste waarde van m, rekenen we wat eenvoudige gevallen door. De tabel in figuur 6 geeft de resultaten.

n	m	p	a_m+2^p-1	a_n
1	0	0	0	1
2	0	1	0+1=1	3
	1	0	1+0=1	3
3	1	1	1+1=2	5
4	1	2	1+3=4	9
	2	1	3+1=4	9
5	2	2	3+3=6	13
	3	1	5+1=6	13
6	3	2	5+3=8	17
7	3	3	5+7=12	25
	4	2	9+3=12	25
8	4	3	9+7=16	33
	5	2	13+3=16	33
9	5	3	13+7=20	41
	6	2	17+3=20	41
10	6	3	17+7=24	49

Fig. 6

De waarden van m en p, die de hoogtes aangeven van de eerste hulpstapel resp. de tweede hulpstapel, zijn zo gekozen dat de uitdrukking a_m+2^p-1 zo klein mogelijk is bij de betreffende waarde van n. Dit is louter een kwestie van rekenen geweest. Dat gereken gaat nog een poosje door, maar tevens kan men gaan nadenken over wat we in de tabel zien. Het totale aantal verplaatsingen a_n blijkt steeds toe te nemen met een macht van 2 als n met 1 toeneemt: 2, 2, 4, 4, 4, 8, 8, 8 en 8. Bij de n-waarden 1, 3, 6, en 10 blijkt de tweemacht groter te worden. Er is nog iets aan de hand met deze waarden van n. Meestal blijken er twee optimale manieren te zijn om de stapelhoogtes m en p te kiezen, behalve voor n=1, 3, 6 en 10. Dan is er kennelijk maar één optimale mogelijkheid om de stapel van n dozen te verplaatsen. Tussen 1 en 3, tussen 3 en 6, en ook tussen 6 en 10 is er een soort competitie tussen de twee hulpstapels. Het blijkt voordeliger te zijn om de eerste hulpstapel te laten aangroeien en de tweede constant te houden totdat n één van de genoemde waarden bereikt. Dan is het plotseling voordeliger om m (even) constant te houden en p met 1 te doen toenemen. We noemen daarom de waarden 1, 3, 6, 10, ... (de rij blijkt natuurlijk door te gaan, met als eerstvolgend getal 15) *drempelwaarden*. Het is een rekenkundige rij van de tweede orde en zijn getallen kunnen we algemeen schrijven als ½p(p+1), waarbij p een positief natuurlijk getal is, dus 1, 2, 3, ... De getallen tussen twee drempelwaarden zijn gelijk aan ½p(p+1) + nog iets. Dit brengt ons op het idee om voor een willekeurig natuurlijk getal N te schrijven

$$N=\tfrac{1}{2}p(p+1) + q,$$

waarbij q een getal is met mogelijke waarden 0, 1, ..., p. *Alle* natuurlijke getallen blijken zo geschreven te kunnen worden en wel op precies één manier. Men zegt wel dat het paar (p,q) het getal N representeert en we schrijven daarom N=(p,q). Een soort getalstelsel dus dat u kunt vergelijken met ons gewone decimale stelsel of met het zo langzamerhand bijna even bekende binaire stelsel. Het blijkt nu, nadat we nog eens naar de tabel gekeken hebben en na nog wat meer gereken, dat de getallen a_n, waarom het ons in eerste instantie is begonnen, te schrijven zijn als

$$a_n = (p+q)2^p + 1,$$

waarbij p en q de "digits" zijn van n−1 in onze nieuwe getalrepresentatie, dus de p en q uit $n-1=\frac{1}{2}p(p+1)+q$.

De uitdrukking voor a_n ziet er heel bevredigend uit. Zij is eenvoudig en lijkt op haar soortgenoot van het drie-stapel-probleem.

Om een stapel van n dozen te verplaatsen op een optimale manier moeten we dus de betreffende waarde van p kennen. Dat gaat heel gemakkelijk. We doen het eerst voor q=0. Er geldt dan dat $n-1=\frac{1}{2}p(p+1)$ ofwel $p^2+p-2(n-1)=0$.

Dit is een vierkantsvergelijking in p, met als oplossing

$$p = \left\lfloor \frac{-1+\sqrt{1+8(n-1)}}{2} \right\rfloor ,$$

zoals menigeen zich zal herinneren van zijn middelbareschoolwiskunde. Als $q>0$ is, geldt de formule ook nog. De grote haken duiden dan aan dat we het heeltallige deel moeten nemen van wat er tussen staat en dus het breukdeel moeten verwaarlozen.

Vanzelfsprekend is het verhaal hiermee niet af. Wij hebben het aantal verplaatsingen a_n min of meer geraden door wat te rekenen met de getallen in een tabel die liep van 1 tot 10 wat n betreft. Er moet nu bewezen worden dat de uitdrukking geldig is voor *alle* waarden van n. Dat houdt in dat we moeten aantonen dat a_n de oplossing is van de recursieve vergelijking die we eerder lieten zien. Langzamerhand gaan de activiteiten lijken op iets wat gewoonlijk wiskunde wordt genoemd. Sommigen van u verwachten nu dat ik zal gaan zeggen dat hier het echte denken begint. Dat doe ik echter niet. Zo er al een grens is tussen rekenen en denken, dan is die grens *uiterst* vaag. Zelfs de vraag of er principieel onderscheid is ben ik geneigd ontkennend te beantwoorden.

Het zogenaamde logisch denken, waarmee men in dit verband een soort Booleaanse algebra bedoelt, kan in elk geval uitstekend gesimuleerd worden door computerprogramma's. Soms ook is het mogelijk om stellingen af te leiden en te bewijzen binnen zeer strak gestructureerde systemen. Echter, wanneer het aankomt op datgene wat ik voor het gemak *creatief denken* zal noemen, kunnen we in het algemeen niet terugvallen op rekenmachines en hun programmatuur. Dit nu doet zich met name voor bij het tweede probleem dat we ons gesteld hebben, namelijk bewijzen dat de door ons besproken algoritme werkelijk optimaal is. We hebben immers maar een beperkt aantal mogelijke stapelprocedures onderzocht. Eerst verplaatsten we de bovenste deelstapel van m dozen ‘in zijn geheel’ naar een eerste hulplocatie en vervolgens de deelstapel van n-m-1 dozen naar de tweede hulplocatie, en wel deden we dit voor verschillende waarden van m. Er zijn natuurlijk zeer veel andere mogelijkheden denkbaar. Denk er hierbij aan dat alleen al het aantal mogelijke tussentoestanden van n dozen op vier stapels gelijk is aan 4^n, een getal dat exponentieel groeit bij toenemende n. Het aantal mogelijke routes van de begintoestand naar de eindtoestand is nog vele malen groter. Bovendien moet het bewijs geleverd worden voor *alle* positieve gehele waarden van n.

Hoe nu aantonen dat die ene door ons doorgerekende route (stapel-procedure) altijd de snelste is? Helaas kan ik u daarover, binnen de mogelijkheden van dit uur, niets vertellen. Ik meen erin geslaagd te zijn het bewijs te leveren. Althans, ik heb een redenering gevonden die mijzelf overtuigde van de juistheid van het vermoeden van Sarkar. Het volgende stadium is dat ook de referees van het tijdschrift, waarin ik het uiteindelijke artikel wil publiceren, overtuigd moeten raken van de correctheid van het bewijs. (Ik beloofde u iets te vertellen uit het leven van alledag van de onderzoeker.)

Er was nog een derde vraag, namelijk die betreffende een iteratieve versie van de algoritme: een voorschrift, of een serie voorschriften, waarmee een mens een stapel van n dozen kan verplaatsen. Ook hiervoor ontbreekt de tijd, maar ik kan u nog wel een enkel resultaat laten zien.
Het antwoord laat zich weer formuleren in termen van een verplaatsingsrij, analoog als bij het drie-stapel-probleem. De rij geeft de volgorde van de dozen aan waarin zij verplaatst moeten worden. De vraag naar welke stapel

precies een doos verplaatst moet worden, is daarmee nog niet beantwoord. Dit blijkt echter weer een betrekkelijk gemakkelijk deelprobleem te zijn waarvoor een eenvoudige regel de oplossing biedt.
Als voorbeeld nemen we n=10. De verplaatsingsrij die bij onze algoritme hoort luidt

$T^4(10) =$ 1 2 3 2 1 4 5 4 6 4 5 4 1 2 3 2 1
7 8 7 9 7 8 7 10 7 8 7 9 7 8 7
1 2 3 2 1 4 5 4 6 4 5 4 1 2 3 2 1

Ook in deze rij zit allerlei symmetrie. Dit komt beter tot uiting als we de rij getallen anders schrijven. Het blijkt dat we $T^4(n)$ ook kunnen uitdrukken als een reeks van rijen T(j), j=1,2,..., die horen bij het drie-stapel-probleem. In ons voorbeeld van n=10 geldt

$T^4(10) =$ T(1) T(2) T(1) T(3) T(1) T(2) T(1) T(4)
T(1) T(2) T(1) T(3) T(1) T(2) T(1)

De rij T(1) geeft het verplaatsingsvoorschrift voor doos 1, T(2) voor dozen 2 en 3, T(3) voor dozen 4, 5 en 6, terwijl T(4) het voorschrift geeft voor dozen 7, 8, 9 en 10. Zoals we zagen vormen de rijen T(1), T(2), T(3), T(4), ..., elk, in toenemende mate, een fractal. In $T^{(4)}(10)$ zijn ze op hun beurt weer op een fractalachtige manier geordend. We zouden kunnen zeggen dat we hier een superpositie van fractals hebben.

BEWIJZEN

Ik vertelde u al dat ik er in geslaagd meen te zijn het bewijs te leveren van het optimaal zijn van de algoritme van Sarkar. Ik deed dat met enige trots, omdat het vier-stapel-probleem al vele jaren de aandacht heeft getrokken van menig onderzoeker in de wiskunde en in de informatica. Er zijn echter nog een paar redenen waarom ik dit aspect aan de orde stel. Een bewijs is – zoals gezegd – een sluitende redenering waarmee men anderen kan overtuigen van de juistheid van een mathematische uitspraak. Niet alleen anderen moeten overtuigd worden, maar ook de onderzoeker zelf. Hij kan, al rekenend, wel denken een soort relatie of een structruur te zien, maar of hij dit juist ziet, en bovenal, of het *altijd* waar is, voor alle waarden van de betrokken parameters, weet hij nooit zeker, totdat hij het 'echt bewezen' heeft. Een bewijs kan zeer arbeidsintensief zijn, het kan talloze deelproblemen opleveren en men kan al zoekende op dwaalwegen belanden, het spoor bijster raken of in valkuilen terecht komen. Mocht de onderzoeker een bewijs niet rond krijgen, dan kan dit betekenen dat zijn vermogens te kort schieten. Het zou echter ook zo kunnen zijn dat datgene wat hij dacht waargenomen te hebben niet algemeen geldig is. Maar wanneer weet hij dat en wanneer is het ogenblik gekomen dat hij zijn pogingen moet staken en zijn energie in een ander probleem moet gaan stoppen? Het Nederlands Wiskundig Genootschap heeft als devies "Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Enerzijds is dit een zeer troostrijke gedachte, uiterst geschikt om de moed erin te houden wanneer men voor de zoveelste keer bemerkt dat een bewijspoging gaat stranden. Anderzijds een misschien wat misleidende aanmoediging. Als een stelling niet algemeen geldig is, dan kan de onderzoeker blijven proberen wat hij wil, maar in plaats van boven te komen zal hij kopje ondergaan. Bovendien weten we, sinds Gödel, dat er uitspraken bestaan waarvan noch de juistheid noch de onjuistheid bewezen kan worden (deze stelling op zich is bewezen!), maar dat kon men indertijd bij de oprichting van het Wiskundig Genootschap in 1778 nog niet weten.

Uit deze overpeinzingen mogen twee dingen duidelijk zijn.
In de eerste plaats dat onderzoeken een ongewisse bezigheid is, met veel geploeter en met kansen op mislukking. Als het bewijs dan uiteindelijk toch tot stand komt is er een kort ogenblik van voldoening. Alle stukjes van de legpuzzel blijken een zeer natuurlijke plaats in te nemen en het eerst zo uitdagende en onoverzichtelijke probleem blijkt – vaak op elegante wijze – opgelost te zijn. Onderzoeken kortom, lijkt dus erg op ondernemen. U kent ze wel, de verhalen over het gat in de markt, het met volle energie zich daarop storten, de investeringen en de winsten of verliezen die uiteindelijk resulteren. Een tweede opmerking die ik wil maken is deze. Zo u dit al niet wist, hoop ik u ervan overtuigd te hebben dat bewijzen een essentieel onderdeel is van wiskundige activiteiten. Opmerkelijk is daarom dat dit

aspect, sinds het begin van de zeventiger jaren tot kort geleden, zo goed als verdwenen is uit het wiskundecurriculum voor deelnemers aan het vwo–onderwijs. Welke de redenen hiervan precies zijn geweest laat zich niet in een paar woorden uitdrukken. Het afschaffen van de vlakke meetkunde als aparte discipline lijkt een belangrijke oorzaak te zijn geweest. Immers, dit is een vak bij uitstek om bewijstechnieken aan te leren. Andere oorzaken worden ook genoemd. Zo zouden sommigen vinden dat bewijzen en creativiteit op gespannen voet met elkaar staan. Onzin natuurlijk! Niets vereist meer creatieve inspanning. Vaak zelfs worden stelling en bewijs tegelijkertijd ontwikkeld. Een andere argumentatie luidde: bewijzen is moeilijk en slechts voor weinigen weggelegd, dus kan men het beter afschaffen. U mag voor uzelf de politieke stromingen invullen die hieraan ten grondslag lagen. Hoe het ook zij, ik laat het aan de geschiedschrijvers van de wiskunde over om te verklaren hoe het kan dat in het laatste kwart van de twintigste eeuw, op een betrekkelijk klein gebied in Noord-West Europa, een aantal generaties vwo-leerlingen dit essentiële deel van hun wiskunde–opvoeding is onthouden.
Gelukkig keert het tij. In de nieuwe opzet van het Tweede–Fase–onderwijs, waarvan het studiehuis een onderdeel is, is plaats ingeruimd voor het bewijs. Leerlingen van de richting Natuur en Techniek zullen in het vijfde en zesde schooljaar gedurende enige tijd vertrouwd worden gemaakt met bewijzen en bewijsmethoden. Betrekkelijk laat dus in hun schoolcarrière, en met mondjesmaat, maar het begin is er en dat stemt tot gematigde vreugde.

ONDERNEMEN

Wat ik u tot nu toe niet vertelde is de tijd die dat ene bewijs me gekost heeft: ongeveer drie maanden. In het uiteindelijke tijdschriftartikel waarin ik mijn bevindingen zal publiceren neemt het hoogstens anderhalve pagina in beslag. Verschillende reacties zijn hier mogelijk. Sommigen zullen zich afvragen of de R. Timman Stichting wel de juiste persoon benoemd heeft op de met haar geassocieerde stoel. U zult begrijpen dat dit niet de weg is die ik met u wil bewandelen. In eerste aanzet is het mijn bedoeling om de verhouding van inzet en kwantitatief resultaat te bezien tegen de achtergrond van het bedrijfsleven–ethos dat nu reeds jarenlang in de Nederlandse universitaire wereld rondwaart. Elke maand september, bij de opening van het academisch jaar, beijveren universiteitsmanagers zich om de politiek en de buitenwereld duidelijk te maken hoe onderwijs en onderzoek nog sneller, efficiënter, productiever en vooral goedkoper kan; en hoe men de wetenschappelijke productie nog meer omhoog zou kunnen jagen. Het gepaste antwoord daarop is dat denken tijd kost en van een andere orde is dan de aanmaak van bakstenen of gloeilampen. Een treurig dieptepunt in deze is de uitdrukking 'de ondernemende universiteit'. Ooit meende ik dat dit een soort typefout was. Het moest natuurlijk zijn: onderzoekende universiteit of onderwijzende universiteit, of beide natuurlijk. Later begreep ik dat het een staaltje is van het nieuwe academische denken, een soort 'newspeak' zeg maar. Men hoeft toch werkelijk niet de universiteit als een tempel van wetenschap te zien om een dergelijke benaming en bijbehorende denkwereld te verfoeien. Ofwel je wilt als samenleving onderwijs en onderzoek beoefenen op universitair niveau en accepteert dan ook de financiële consequenties daarvan, ofwel je vindt geld verdienen belangrijker. In het laatste geval noem je de betrokken instelling gewoon handelshuis of optiebeurs.

Als uitvloeisel van deze nieuwe ferme koopmansgeest noemde ik al het spreken in termen van productiviteit wat het wetenschappelijk onderzoek betreft en het benadrukken van kwantiteit in plaats van kwaliteit: het zogenaamde 'publicaties tellen'. Op termijn kan dit slechts leiden tot risicoloos routine–onderzoek en tot fragmentarisering van publicaties. Hier geldt met recht het woord van Schopenhauer: "Wo das Rechnen anfängt, hört das Verstehen auf", geciteerd door Prof. dr. A.W. Grootendorst in zijn afscheidsrede tien jaar geleden, en waarvan ik hier de volgende Nederlandse variant geef: "Waar het rekenen begint, daar houdt het denken op."

Met echt ondernemerschap heeft dit allemaal weinig te maken, hoogstens op dorpsniveau, kruidenierspolitiek dus. Een woord van verontschuldiging is hier op zijn plaats t.a.v. mensen die ik heb gekend die met veel enthousiasme en beperkte middelen een eigen zaak opbouwden. Mijn eigen vader en ook mijn schoonvader waren daar goede voorbeelden van, echte ondernemers dus.

De enige echte universitaire ondernemers zijn zij die wetenschappelijke risico's durven nemen, ondanks het soms knellende regiem van tellijsten. Natuurlijk is dit vaker gezegd. En er zijn ook betere voorbeelden dan hetgeen ik over mezelf vertelde. Een extreem geval is dat van de wiskundige Andrew Wiles die een aantal jaren geleden in het nieuws was. Zes à zeven jaar werkte hij in betrekkelijke geïsoleerdheid aan zijn ideaal om het vermoeden van Fermat te bewijzen, iets wat generaties mathematen al had bezig gehouden. Na stug volhouden slaagde hij uiteindelijk.

Ik kan mij de dialoog voorstellen wanneer de een of andere tellustige manager met dit succesverhaal geconfronteerd wordt. Met lichte ironie in zijn stem zal hij mij de vraag stellen: "Maar jij denkt toch niet een Wiles te zijn?" En ik zal hem antwoorden: "Mogelijk niet, maar in elk geval ben ik *wèl* een ondernemer!" Of, afhankelijk van mijn humeur, "(...) ben *ik* wel een ondernemer!"

Waarde toehoorders, u zult begrepen hebben wat ik bedoel. Nogmaals, ik ben niet de enige en zeker niet de eerste die dergelijke gedachten uitspreekt. Als illustratie hiervan heb ik nog één citaat, vertaald uit het Grieks, waarmee ik mijn voordracht wil afsluiten. Het gaat ook over een tempel waarin toestanden heersen die de hoofdpersoon niet aanstaan. Ik lees u voor uit het evangelie van Johannes, hoofdstuk 2, vers 14 tot en met 16:

"(...) en Jezus ging op naar Jeruzalem. En Hij vond in de tempel de verkopers van runderen en schapen en duiven en de geldwisselaars die daar zaten. En hij maakte een zweep van touw en dreef allen uit de tempel, de schapen en de runderen, en het geld van de wisselaars wierp Hij op de grond en hun tafels keerde Hij om. En tot de duivenverkopers zei Hij: Neem dit alles hiervandaan en maak het huis mijns Vaders niet tot een koophuis."

Mij lijkt dit een goede uitsmijter!

WOORDEN VAN ERKENTELIJKHEID

Mijn dank gaat allereerst uit naar het **College van Bestuur van de Universiteit Maastricht** voor het instellen van de bijzondere leerstoel Grondslagen van de Kennistechnologie vanuit de Theoretische Informatica.

In het verlengde hiervan bedank ik de **R. Timman Stichting** voor het feit dat ze mij als eerste op deze stoel benoemd heeft, alsmede het **Curatorium** voor het in mij gestelde vertrouwen.

Hooggeleerde Wolbers, Beste Henk,
Jij bent in mijn ogen altijd een toonbeeld geweest van vasthoudendheid en doorzettingsvermogen. Ik geloof niet dat je deze eigenschappen ten volle hebt hoeven aanwenden voor mijn benoeming, maar toch ben ik je zeer erkentelijk voor je inspanningen in deze. Destijds, in de jaren zeventig, bewogen vele discussies die wij hadden of waaraan wij deelnamen zich rond het spanningsveld tussen informatica en wiskunde. Zoals je gemerkt zult hebben, is dat spanningsveld er voor mij nog steeds. De leerstoel waarop ik nu benoemd ben, heeft in zijn omschrijving het woord "informatica", "theoretische" weliswaar, maar toch! In april, bij de eigenlijke benoeming, liet je doorschemeren dat je die gebeurtenis, vanwege dat woord, als een soort 'homecoming' van mij beschouwde. Ik gun je deze overwinning graag en feliciteer je er bij deze mee.

Hooggeleerde Grootendorst, Beste Albert,
In de loop der jaren heb ik vele van jouw kwaliteiten leren kennen. Lukraak pik ik er eentje uit, en wel jouw onbeperkte vermogen om gesprekken op te sieren, en vooral ook af te sluiten, met citaten, gezegden, bon mots, witzen en jolly jokes. Ik beperk mij hier even tot de *moderne* talen. Zoals je hebt gemerkt, heb ik er eentje van gebruikt, zij het niet in het Grieks. Wat dit laatste betreft, jij begon je klassieke opleiding na het behalen van het einddiploma h.b.s. Misschien dat ik iets van mijn achterstand kan wegwerken als ik met emeritaat ben, een uitdrukking die ik sinds kort tot mijn vocabulaire mag rekenen.

Hooggeleerde Boon, Beste Kasper,
Jou ben ik zeer erkentelijk voor het banen van het pad binnen de faculteit Algemene Wetenschappen van de Universiteit Maastricht, waarlangs de procedure van mijn benoeming zonder noemenswaardige hindernissen afgewikkeld kon worden.

Hooggeleerde Van Katwijk, Beste Jan,
Jou bedank ik voor het vinden van de weg aan Delftse kant om mij hier te benoemen. Het samenwerkingsprojekt DEMARRAGE tussen de TUD en de UM op het gebied van Intelligente Systemen, Spelen en Algoritmen is mede dank zij jou tot stand gekomen.

Hooggeleerde Van den Herik, Beste Jaap,
Jou prijzen om je grote inzet en energie zal zo langzamerhand als een cliché bij je overkomen. Toch doe ik het maar! Ik verheug me voorts op de hernieuwde samenwerking tussen ons wat betreft onderwijs en onderzoek.

Leden van de familie Timman,
U ben ik erkentelijk voor uw belangstelling en aanwezigheid deze middag. Uw vader heb ik niet persoonlijk gekend. Op 1 september 1974 verruilde ik de RU Groningen als werkgever voor de TU Delft. Tot 9 november 1975, de dag waarop uw vader plotseling overleed, heb ik hem slechts op afstand meegemaakt. Wij waren van verschillende vakgroepen lid en de tijd is te kort geweest om te 'mengen'. Uit de verhalen kwam hij over als een eerlijk en betrouwbaar mens en als een uitstekend leider, die vaak op amusante wijze de dingen naar zijn hand wist te zetten. Ik ben er trots op een leerstoel te bezetten waaraan zijn naam verbonden is.

Lieve Anke,
Jou wil ik bedanken voor je nimmer aflatende aanmoedigende houding t.a.v. mijn bezigheden door de jaren heen. Ik realiseer me terdege dat dit niet altijd makkelijk is wanneer je met de onderwerpen zelf geen affiniteit hebt. Misschien dat het volgende je zal amuseren. In september van dit jaar stond

er in Delta, de Delftse universiteitskrant, een interview met een eerstejaars meisje. Op de vraag hoe de eerste weken haar waren bevallen antwoordde ze: "Het is hier geweldig leuk en die–nerds–met–die–nullen–en–die–enen neem ik op de koop toe".

Beste Arend en Mattijs,
Jullie hebben inmiddels zelf een beroep en voor allebei geldt dat de aard van je werk zich nogal onderscheidt van die van het mijne. Dat is ook goed lijkt me, appels moeten niet al te dicht bij de stam terecht komen. Toch zijn er raakvlakken. Wat jou betreft Arend, jouw bankwereld is niet bepaald het domein van je vader, maar zoals je vanmiddag hebt kunnen horen, beschouwt de man zichzelf wel als een soort ondernemer. En op jou Mattijs is zeker het devies van het Wiskundig Genootschap van toepassing dat zegt dat je met "onvermoeide arbeid" alles te boven komt. In je sportcarrière en in de follow–up daarvan in de IT–wereld heb je dat zeker bewezen.

Dames en Heren, ik dank u voor uw aandacht.

REFERENTIES

Gerard Alberts, *Jaren van Berekening, Toepassingsgerichte Initiatieven in de Nederlandse Wiskunde-beoefening 1945-1960*, Amsterdam University Press, Amsterdam, 1998.

Grootendorst, A.W., "*Wat ik nog zeggen wilde*", (Afscheidsrede als gewoon hoogleraar in de wiskunde aan de Technische Universiteit Delft.), TU Delft, Faculteit der Technische Wiskunde en Informatica, 1989.

Sarkar, U.K., *Solution to Cargo Loading Problem Using Multi-peg Towers of Hanoi – A Heuristic Search Approach*, Proc. of the International Conference on Knowledge Based Computer Systems (KBCS-98) (ed. M. Sasikumar et al), NCST Publ., 1998, pp. 65-76.