On beliefs and incomplete preferences in noncooperative games

Chapter 7

Nederlandse samenvatting (summary in dutch)

Speltheorie bestudeert situaties waarin een aantal mensen ("spelers") een beslissing (of een aantal opeenvolgende beslissingen) neemt en de algehele uitkomst afhangt van alle genomen beslissingen. In dit proefschrift ben ik daarbij slechts ingegaan op de klasse van niet-coöperatieve spelen, waarbij spelers slechts de maximalisatie van hun eigen nut nastreven en geen coalities vormen. In deel I ga ik vooral in op enkele aspecten die te maken hebben met "beliefs", i.e. de inschattingen die spelers maken m.b.t. zaken waarover zij in onzekerheid verkeren, zoals de strategiekeuze van hun tegenstanders, de inschattingen die de tegenstanders van de strategiekeuze van hún tegenstanders maken of, zoals we ook in deel I hebben gezien, de nutsfunctie van de tegenstanders.

In hoofdstuk 2 stel ik me de vraag wat speler 2 in een "signaling game" moet denken en doen als hij een beslissing van speler 1 waarneemt die hij, gegeven zijn inschatting van de situatie, als niet optimaal (en dus irrationeel) voor speler 1 had ingeschat. Bekende evenwichtsconcepten zoals sequentieel evenwicht bieden geen mogelijkheid tot het reviseren van een inschatting, dus in deze modellen zou speler 2 de beslissing van zijn tegenstander als irrationeel beschouwen en blijven beschouwen. Ik houd daarentegen vast aan de aanname dat iedere speler rationeel is en denkt dat zijn tegenstander rationeel is. Daartoe dient speler 2 zijn inschatting ten aanzien van grootheden op basis waarvan speler 1 een beslissing neemt te herzien. Dit formaliseer ik met het "preference conjecture equilibrium (pce)" uit [Perea, 2003] en ik laat de samenhang tussen pce en sequentieel evenwicht zien door aan te tonen dat enerzijds elk pce een sequentieel evenwicht induceert en er anderzijds bij elk sequentieel evenwicht een pce geconstrueerd kan worden dat dit sequentieel evenwicht induceert.
Natuurlijk zijn er vele manieren om de inschattingen zodanig te herzien dat de beslissing van speler 1 gerationaliseerd wordt. Daarom voer ik een maat in voor de "afstand" tussen de oorspronkelijke en de herziene inschatting, betoog

dat speler 2 kiest voor de kleinste herziening van zijn inschatting die in het kader van dit afstandsbegrip nodig is om de beslissing van zijn tegenstander te rationaliseren en onderzoek de consequenties hiervan. Dit leidt tot een nieuw concept, namelijk "minimum revision equilibrium". Ook ga ik in op de eventuele samenhang van dit nieuwe concept met bestaande concepten.

In hoofdstuk 3 gebruik ik een epistemisch model om een bekend en belangrijk resultaat uit de literatuur te veralgemeniseren. In een epistemisch model wordt de structuur van iteratieve beliefs geformaliseerd. Stel twee spelers, A en B, spelen een spel. Voordat A zijn beslissing neemt, vormt hij een belief over wat hij denkt dat B gaat doen. B doet echter het zelfde, dus baseert A zijn keuze indirect eigenlijk ook op wat B denkt dat hij gaat doen. Ook dit geldt voor B, dus eigenlijk baseert A zijn keuze ook op zijn inschatting van wat B denkt dat A denkt dat B gaat doen enzovoort. In concreto wordt in ons epistemisch model aangenomen dat A en B rationeel zijn, van elkaar denken dat ze rationeel zijn, van elkaar denken dat ze denken dat hun tegenstander rationeel is enzovoort. We formuleren dit model voor een spel met in het algemeen n spelers.
In de literatuur bestaat er een belangrijk resultaat [Tan & Werlang, 1988] dat het proces van iteratieve eliminatie van strikt gedomineerde strategieën verbindt met het principe "common belief in rationality". Het eliminatieproces voor strikt gedomineerde strategieën heb ik in de inleiding al met een eenvoudig voorbeeld toegelicht. Het is het proces waarbij de spelers eerst eigen pure strategieën "wegstrepen" die strikt gedomineerd zijn (waarvoor er dus een strategie bestaat die, ongeacht de actie van de tegenstanders, beter is) en vervolgens aannemen dat hun tegenstanders dat ook doen. Vervolgens ontstaat er een 'gereduceerd spel' (qua aantal pure strategieën), waarin dit proces zich herhaalt (een pure strategie die in eerste instantie niet strikt gedomineerd was, kan dat nu wel zijn omdat er ook pure strategieën van de tegenstanders zijn "weggestreept"). Dit proces wordt herhaald tot er geen pure strategieën meer kunnen worden weggestreept. Met "common belief in rationality" bedoelen we het geloof ('belief') in de rationaliteit van de tegenstanders volgens het in de vorige alinea beschreven iteratieve proces. Het resultaat van [Tan & Werlang, 1988] verbindt deze twee concepten door aan te tonen dat een pure strategie dan en slechts dan op rationele wijze gekozen kan worden onder "common belief in rationality" als deze strategie het iteratief eliminatieproces van strikt gedomineerde strategieën overleeft.
Het resultaat van [Tan & Werlang, 1988] gaat ervan uit dat de nutsfuncties van alle spelers algemeen bekend zijn. Wij laten zien dat een soortgelijk resultaat ook bewezen kan worden als spelers onzekerheid hebben over elkaars nutsfuncties, mits we additionele eisen stellen aan de samengestelde structuur van de klasse van nutsfuncties die spelers voor hun tegenstanders mogelijk achten en de strategiekeuzen van de spelers . Als voorbeeld passen we het hoofdresultaat toe op het bekende Cournot model, waaraan we onzekerheid over de marginale kosten van de tegenstander hebben toegevoegd. Ons hoofdresultaat zou de basis voor een elegant en intuïtief bewijs voor de stelling over "pure strategy dominance" van [Börgers, 1993] vormen, als we zouden kunnen bewijzen dat de

daarbij bijbehorende klasse van monotone nutsfuncties in combinatie met de mogelijke strategiekeuzen aan de additionele eis voor toepasbaarheid van onze stelling voldoet. Dat laatste is ook gedurende de laatste tijd voor ons een open probleem gebleven (technisch gezien is de geslotenheid onder Harsanyi aggregatie respectievelijk de geslotenheid onder additie van betreffende verzamelingen te bewijzen).

In hoofdstuk 4 pas ik het principe van stochastische dominantie toe op tweepersoonsspelen. Stochastische dominantie is een manier om kansverdelingen over pure uitkomsten met elkaar te vergelijken als we slechts uitgaan van de aanname dat spelers een volledige, transitieve en asymmetrische preferentierelatie hebben over pure uitkomsten. Belangrijk is dat stochastische dominantie leidt tot onvolledige preferentierelaties over kansverdelingen. We verbinden onze analyse aan een recent paper van [Dubra et al, 2004], waarin de consequenties worden onderzocht van het laten vallen van de volledigheidsaanname uit de von Neumann Morgenstern condities. In [Dubra et al, 2004] wordt aangetoond dat er ook voor dit type preferentierelaties een representatiestelling bewezen kan worden. In hoofdstuk 6 ga ik daar nader op in. In hoofdstuk 6 laat ik ook zien dat de op het eerste gezicht tamelijk willekeurige manier om kansverdelingen te beoordelen met het criterium van stochastische dominantie voor een bepaalde klasse van onvolledige preferentierelaties tot conclusies leidt die algemener waar zijn dan slechts voor stochastische dominantie (namelijk voor die hele klasse van onvolledige preferentierelaties).
Eerste graad stochastische dominantie leidt tot de conclusie dat een kansverdeling beter wordt door gewicht te verschuiven naar betere pure uitkomsten. Hoe hoger de graad van stochastische dominantie, hoe sterker dit effect. We zeggen dat een strategie een "beste antwoord" is als er geen andere strategie bestaat die een kansverdeling induceert die in termen van stochastische dominatie boven deze eerste strategie wordt geprefereerd. Aangezien de relatie onvolledig is, kunnen er paren van kansverdelingen zijn die niet met elkaar vergeleken kunnen worden. Een evenwicht construeren we vervolgens als paar van beste antwoorden. in de literatuur heeft Fishburn een verband gelegd tussen de verzamelingen evenwichten in termen van eerste orde stochastische dominantie en de verzameling Nash evenwichten van alle representerende nutsfuncties. Het gaat hierbij om een intuïtief resultaat dat zegt dat een kansverdeling in termen van eerste orde stochastische dominantie ongedomineerd is als er tenminste één representerende nutsfunctie te vinden is waarvoor deze verdeling een beste antwoord is met betrekking tot die nutsfunctie.
In hoofdstuk 4 laat ik zien dat algemeen voor stochastische dominantie van orde t een soortgelijk resultaat bewezen kan worden. Ook ga ik in op de consequenties van het toenemen van de graad van stochastische dominantie. Het blijkt dat de geïnduceerde preferentierelatie steeds minder onvolledig wordt (in de limiet zelfs volledig) en dat toenemende graad van stochastische dominantie een toenemende aversie tegen "slechte" uitkomsten impliceert. Ook bewijs ik een limietresultaat waarin de verzameling van evenwichten wordt onderzocht voor de limiet waarin de graad van stochastische dominantie naar oneindig con-

vergeert. Het resultaat laat zien dat voor bepaalde klassen van dragers (pure strategieën waaruit de spelers kiezen) een oneindige graad van stochastische dominantie impliceert dat spelers de strategie kiezen die voor hun tegenstander optimaal is (een vorm van altruïsme). Het resultaat impliceert ook dat in de limiet een lexicografische preferentierelatie ontstaat (en er dus maar één strategie overblijft als beste antwoord). Omgekeerd laat ik zien dat, omgekeerd, voor iedere drager die in deze klasse ligt een rijtje evenwichten met bovenstaande eigenschappen geconstrueerd kan worden.

Hoofdstuk 5 behandelt een in zekere zin natuurlijke uitbreiding van hoofdstuk 4. In niet coöperatieve spelen waarin de preferenties van de spelers door von Neumann - Morgenstern preferentierelaties zijn gegeven zijn er twee belangrijke evenwichtsconcepten: Nash evenwicht en gecorreleerd evenwicht (zie ook de inleiding en hoofdstuk 5). Hoofdstuk 4 ging onder andere over de samenhang tussen Nash evenwich en t-evenwicht. Ik pas in hoofdstuk 5 de concepten uit hoofdstuk 4 toe op gecorreleerd evenwicht, wat leidt tot het concept gecorreleerd t-evenwicht. Ook hier ga ik in op de limiet waarin de graad van stochastische dominantie naar oneindig convergeert. In tegenstelling tot hoofdstuk 4, waar in de limiet voor beide spelers een pure strategie resulteerde, kan hier ook een kansverdeling over strategieën als limiet bereikt worden. Ik laat zien dat, gegeven de drager van een limiet van gecorreleerde t-evenwichten, er voor iedere kansverdeling over deze support een rijtje gecorreleerde t-evenwichten geconstrueerd kan worden dat naar deze kansverdeling convergeert. Met andere woorden, als een bepaalde kanverdeling als limiet resulteert, kan ook ieder andere kansverdeling met dezelfde drager als limiet van gecorreleerde t-evenwichten voorkomen.

In hoofdstuk 6 ga ik in op onvolledige preferentierelaties in algemenere zin. Allereerst ga ik in op de stelling uit [Dubra et al, 2004], de tegenhanger van de representatiestelling van Von Neumann en Morgenstern voor onvolledige preferentierelaties. Vervolgens geef ik een aantal axiomata, onafhankelijkheid (independence), "Improvement" en "Bad Outcome Aversion" (BOA). Volgens Improvement wordt een kansverdeling (zwak) geprefereerd boven een andere kansverdeling die slechts op twee punten van de eerste verschilt en op het slechtste van de twee pure alternatieven waarop ze verschillen meer gewicht legt. BOA is een algemene formulering van de eigenschap die we bij stochastische dominantie hadden gezien: een aversie tegen slechte uitkomsten. Ik laat zien dat en preferentierelatie die volledig is op pure uitkomsten en voldoet aan onafhankelijkheid daarmee een eerste orde stochastische dominantie relatie bevat. Verder geef ik een karakterisering in termen van BOA van preferentierelaties die volledig zijn op pure alternatieven en aan onafhankelijkheid en Improvement voldoen. Ik laat zien dat deze karakterisering zeer dicht tegen stochastische dominantie aanligt en bewijs voor de situatie van 3 pure toestanden dat er zelfs een equivalentie bestaat tussen de axiomata en stochastische dominantie voor een orde t. Daartoe breid ik het begrip t-de orde stochastische dominantie uit van natuurlijke t naar reële waarden van t.

In paragraaf 6.4 laat ik zien dat de belangrijkste resultaten uit hoofdstuk 4 algemeen gelden voor preferentierelaties die aan de axiomata voldoen. Zo blijft de karakterisering van evenwichten in termen van Nash evenwichten met betrekking tot representerende nutsfuncties overeind. Ook de limietstellingen voor de limiet naar oneindige aversie tegen slechte uitkomsten geldt algemeen. Daarmee is aangetoond dat stochastische dominantie weliswaar een zeer specifieke keuze is om onvolledige preferentierelaties te waarderen, maar op een aantal fundamentele punten tot dezelfde resultaten leidt als iedere andere preferentierelatie die aan de veel algemenere axiomata voldoet.