Exploiting geometric properties in combinatorial optimization = Benutten van geomwetrische eigenschappen in combinatiorische optimalisatie

Samenvatting

"Exploiting geometric properties in combinatorial optimization"

Natalya Usotskaya

In this thesis we consider a set of problems from the areas of computational geometry and algorithmic graph theory. We are driven by an idea of finding a geometric property which provides some insights about the solution of the considered problem. **Part I** of the thesis is devoted to one computational geometry problem. In this area, a common problem is: given a terrain and a moving object together with its speed and other parameters find the optimal trajectory with respect to some objective, for example, time, distance, price and so on, see [1, 9, 19, 20].

It is often assumed that the speed of this moving object is constant; this assumption may significantly simplify all the calculations. The situation is completely different when we assume that the speed of a mover depends on its position in space. We consider a helicopter as an example of such a mover and model it in several ways. In particular, we use the following physical restriction: when a helicopter goes up its maximum velocity goes down as the air density decreases and the power of the rotor drops. Although the decreasing function of the helicopter's maximum velocity in altitude is quite complex and hardly admits a closed analytical form, it is widely accepted to model it by linear or piecewise linear function with a small number of breakpoints, see, e.g. [3].

So, our first natural step is to model the helicopter's velocity as a linear function. We are looking for the fastest trajectory from one point to another, see **Chapter 3**. We use some techniques of calculus of variations to tackle this problem; and we reduce it to the well-known l'Hôpital's light propagation problem [4]. The fastest trajectory appears to be a circle segment. Furthermore, we model the obstacles (terrain) as a continuous rectilinear curve in two-dimensional space and show that the fastest trajectory within this terrain can be found in time, polynomial in the number of obstacles. It is an open question whether it is possible to obtain a polynomial time algorithm for an arbitrary continuous obstacle curve.

We generalize the previous model by making the velocity function piecewise linear, see **Chapter 4**. It means that within each layer the velocity degradation rate is different. We use the results of the previous chapter and conclude that the fastest trajectory will be a combination of circle segments. This setting leads to a multivariable system of polynomial equations. We use some results from algebraic elimination theory, see, e.g. [8], to reduce this system to one univariable polynomial equation which can be solved by some quick numerical methods like Jenkins-Traub algorithm, see [14]. Some questions stay open. The first question is whether there exists a polynomial time solution to this problem with obstacles in 2D. The second, even more challenging question is whether there are efficient polynomial time approximation schemes for the general helicopter problem with obstacles in 3D.

Parts II and **II** are devoted to various problems involving the treewidth of a graph. The notion of treewidth was introduced by Robertson and Seymour in 1983 [15, 16]. It indicates how much the considered graph is tree-like. Apparently, a lot of hard problems which are easy on trees, are also easy on graphs of small treewidth, see, e.g. [6, 7]. Therefore, the problems of determining the treewidth of a graph or approximating it with a high precision are important for many applications.

We start with planar graphs which do not have bounded treewidth; the question whether or not computing the treewidth of planar graphs is *NP*-hard is still open. But it is known that there is a strong connection between the following parameters of a planar graph: the treewidth, the branchwidth and the largest square-grid minor. There were a number of publications obtaining the upper bounds on the treewidth of a planar graph in terms of the branchwidth and the largest square-grid minor, see, e.g. [11, 12, 17, 18]. The best known result is by Gu and Tamaki [12] which claims that the treewidth is at most 4.5 times the size of the largest square-grid minor. We study a lower bound on this upper bound of the treewidth (see **Chapter 5**) and construct a class of planar graphs where the branchwidth is equal to the largest square-grid minor and where the treewidth is $\frac{3}{2}$ times away from them. This result is followed by Gu and Tamaki [12]; they introduce a class of planar graphs where the treewidth is 2 times away from the largest square-grid minor and is equal to the branchwidth. One of the most interesting questions left is whether there exists a class of planar graphs such that all three parameters are pairwise different.

We continue with the treewidth of general graphs in **Chapter 6**. Two Integer Linear Programming formulations for the problem of finding the treewidth of a general graph are considered. The first formulation is based on the vertex elimination order formulation by Koster and Bodlaender [13]. This formulation can be merged with the flow metric approach by Bornstein and Vempala [5]. Our resulting new ILP cuts some feasible symmetric solutions in the linear relaxation of the original ILP by new inequalities. Furthermore, we introduce a new structural ILP formulation for the treewidth problem based on a drawing of the optimal tree-decomposition on a grid. This new formulation fits within the framework of the local branching technique by Fischetti and Lodi [10]. Therefore, we obtain an exact algorithm for this problem. The computational experiments on different graph classes are left for further research; they may demonstrate the strong and weak points of the proposed ILPs.

Finally, in **Part III**, **Chapter 7**, one application of a treewidth-based approach is introduced. We consider the problem of excluding a subgraph of the given graph by deleting a minimum number of edges from it. This problem is *NP*-hard on general graph instances. We show that by a general result of Courcelle [6, 7], the problem is theoretically solvable in linear time on graphs of bounded treewidth. However, this general approach is not practically useful because of the big constant hidden in an algorithm's running time. Therefore, we present a linear time combinatorial algorithm for a class of graphs with a bounded maximum vertex degree. Moreover, we show that the optimal solution of the problem can be approximated using Baker's type techniques if the input graph is planar, see [2]. The question remains open whether a combinatorial linear time algorithm and a PTAS can be found that do not require the condition concerning maximum vertex degree in the input graph.

References

[1] P.K. Agarwal, Raghavan P., and Tamaki H.: *Motion Planning for a Steering Constrained Robot through Moderate Obstacles.* In Proc. of the 27th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 1995) (1995), pp. 343–352.

[2] B.S. Baker: *Approximation Algorithms for* NP*-Complete Problems on Planar Graphs.* J. ACM, **41**(1) (1994), pp. 153–180.

[3] *Basic Helicopter Handbook.* US Department of Transportation, Federal Aviation Administration, Advisory Circular 61-13A, (1973).

[4] D.P. Bertsekas: *Dynamic Programming and Optimal Control.* Athena Scientific (1995).

[5] C.F. Bornstein and Vempala S.: *Flow Metrics.* Theor. Comput. Sci., **321**(1) (2004), pp. 13–24.

[6] B. Courcelle: *The Monadic Second-Order Logic of Graphs. I. Recognizable Sets of Finite Graphs.* Inf. and Comput., **85**(1) (1990), pp. 12–75.

[7] B. Courcelle: *The Monadic Second-Order Logic of Graphs III: Tree-decompositions, Minor and Complexity Issues.* ITA, **26** (1992), pp. 257–286.

[8] D. Cox, Little J. and O'Shea D.: *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer-Verlag, New York (1992).

[9] O. Daescu, Mitchell J.S.B., Ntafos S., Palmer J.D. and Yap C.K.: *k-Link Shortest Paths in Weighted Subdivisions.* In Proc. of the 9th International Workshop on Algorithms and Data Structures (WADS 2005), Lecture Notes in Computer Science, **3608**, Springer (2005), pp. 325–327.

[10] M. Fischetti, and Lodi A.: *Local Branching.* Math. Program., **98**(1-3) (2003), pp. 23–47.

[11] A.Grigoriev: *Treewidth and Large Grid Minors in Planar Graphs.* Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, **13**(1) (2011), pp. 13–20.

[12] Q.P. Gu and Tamaki H.: *Improved Bounds on the Planar Branchwidth with Respect to the Largest Grid Minor Size.* In Proc. of the 21st International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2010) Part II, Lecture Notes in Computer Science, **6507**, Springer (2010), pp. 85–96.

[13] A.M.C.A. Koster and Bodlaender H.L.: *Private communication.*

[14] W.H. Press, Teukolsky S.A., Vetterling W.T. and Flannery B.P.: *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing.* Cambridge University Press, Cambridge (1992).

[15] N. Robertson and Seymour P.D.: *Graph Minors. I. Excluding a Forest.* J. Comb. Theory, Ser.B, **35**(1) (1983), pp. 39–61.

[16] N. Robertson and Seymour P.D.: *Graph Minors. II. Algorithmic Aspects of Tree-Width.* J. Algorithms, **7**(3) (1986), pp. 309–322.

[17] N. Robertson and Seymour P.D.: *Graph Minors. X. Obstructions to Tree-decomposition.* J. Comb. Theory, Ser. B, **52**(2) (1991), pp. 153–190.

[18] R. Thomas: *Tree-Decompositions of Graphs.*
`http://people.math.gatech.edu/~thomas/SLIDE/CBMS/trdec.pdf`

[19] A. Venkatraman and Bhat S.P.: *Planar Time-Optimal and Length-Optimal Paths under Acceleration Constraints.* In Proc. of Americal Control Conference (2006), pp. 5219–5224.

[20] J.W. Yeol, Ryu Y.S. and Montalvo M.A.: *Shortest Trajectory Planning of Wheeled Mobile Robots with Constraints.* In Proc. of Networking, Sensing and Control, IEEE (2005), pp. 883–888.

Samenvatting

“Exploiting geometric properties in combinatorial optimization”

Natalya Usotskaya

In dit proefschrift staan een aantal vraagstukken uit de gebieden van computationele geometrie en algoritmische grafentheorie centraal. Een belangrijke leidmotief bij de behandeling van deze vraagstukken vormt het zoeken naar en het benutten van geometrische eigenschappen die inzicht bieden in mogelijke oplossingen en oplosmethoden.

Deel I van het proefschrift is gewijd aan de computationele geometrie. Een bekend vraagstuk binnen dit vakgebied is het bepalen van het optimale traject voor een bewegend object met betrekking tot een gegeven grootheid, bijvoorbeeld snelheid, afstand of prijs, zie [1, 9, 19, 20]. Vaak wordt hierbij verondersteld dat de snelheid van het object constant is; een aanname die de benodigde berekeningen vergemakkelijkt. De complexiteit van het probleem neemt aanzienlijk toe wanneer wordt verondersteld dat de maximale snelheid van het object afhangt van zijn positie in de bewegingsruimte. Als voorbeeld van zo'n bewegend object wordt in dit proefschrift een helikopter genomen. Verschillende varianten van het vinden van het optimale traject worden in deze dissertatie vervolgens gemodelleerd. De gebruikte relatie tussen de maximale snelheid en de ruimtelijke positie wordt bepaald door de volgende fysieke eigenschap: wanneer een helikopter omhoog vliegt, neemt de luchtdichtheid af wat resulteert in een afname van de stuwkracht van de rotoren en dientengevolge in een reductie van de snelheid. De daadwerkelijke relatie tussen snelheid en hoogte is redelijk complex en is nauwelijks in gesloten analytische vorm uit te drukken. In de literatuur is het echter gebruikelijk en geaccepteerd om de maximale snelheid van een helikopter te modelleren als een lineaire dalende functie van de hoogte of als een stuksgewijs lineaire functie met een klein aantal breekpunten, zie [3].

Allereerst wordt de snelheid van de helikopter dan ook als een lineaire functie gemodelleerd. **Hoofdstuk 3** beschrijft de situatie waarin de helikopter zich beweegt in een tweedimensionale ruimte met obstakels, die bijvoorbeeld bergen kunnen voorstellen. Een obstakel wordt gemodelleerd als een continue rechtlijnige curve. De vraagstelling in dit hoofdstuk is het bepalen van de snelste route voor de helikopter tussen twee gegeven punten in deze ruimte. Om dit probleem op te lossen worden verschillende technieken uit de variatierekening (onderdeel van de functionaalanalyse) aangewend en wordt het probleem uiteindelijk gereduceerd tot het licht propagatie probleem van l'Hôpital [4]. De route die de helikopter dient te volgen om zo snel mogelijk zijn doel te bereiken blijkt uiteindelijk een cirkelsegment te zijn. Betreffende de complexiteit van het probleem wordt als resultaat gevonden dat het optimale traject bepaald kan worden in tijd, die polynomiaal is in het aantal obstakels. Of er ook voor de situatie waarin obstakels als willekeurige continue curven gemodelleerd worden een algoritme bestaat met een polynomiale doorlooptijd, blijft een open vraag.

In **Hoofdstuk 4** wordt het bovenstaande model gegeneraliseerd door de maximale snelheid van de helikopter als stuksgewijze lineaire functie van de hoogte te modelleren. In dit hoofdstuk wordt de lucht dus gezien als een niet uniform medium dat bestaat uit verschillende lagen. Binnen elke luchtlaag is het tempo waarin de snelheid afneemt met de hoogte verschillend. Mede door gebruik te maken van de resultaten uit het vorige

hoofdstuk volgt als resultaat in dit hoofdstuk dat het optimale traject in een tweedimensionale ruimte in deze situatie bestaat uit een combinatie van cirkelsegmenten. De wiskundige beschrijving van de situatie in dit hoofdstuk leidt tot een multivariaat model met polynomiale vergelijkingen. Door gebruik te maken van resultaten uit de eliminatie theorie binnen de algebraïsche meetkunde, zie [8], wordt dit systeem gereduceerd tot een polynomiale vergelijking in één variabele, die met behulp van snelle numerieke methoden, zoals het Jenkings-Traub algoritme, opgelost kan worden, zie [14]. Enkele vragen blijven onopgelost. Eén daarvan is of er een polynomiale tijd algoritme bestaat voor de gegeneraliseerde situatie met obstakels in de tweedimensionale ruimte. Een meer uitdagende open vraag is of er een efficiënt polynomiaal benaderingsschema bestaat voor het gegeneraliseerde helikopter probleem met obstakels in de driedimensionale ruimte.

Deel II en **III** van dit proefschrift zijn gewijd verschillende aspecten van de boombreedte van een graaf. De notie van boombreedte van een graaf is geïntroduceerd door Robertson en Seymour in 1983 [15, 16]. Het vormt een maat voor de gelijkenis die de graaf vertoont met een samenhangende graaf zonder cykels; een zogenaamde boom. Menig NP-volledig graaftheoretisch probleem laat zich in polynomiale tijd oplossen op een boom. Het is een bekend gegeven dat dergelijke problemen ook vaak in polynomiale tijd oplosbaar zijn op grafen die een lage boombreedte hebben, zie bijvoorbeeld [6, 7]. Het bepalen of het nauwkeurig benaderen van de boombreedte van een graaf is dan ook een relevant vraagstuk met vele nuttige toepassingen.

Allereerst wordt in **Hoofdstuk 5** aandacht besteed aan de boombreedte van planaire grafen. De grafen in deze klasse hebben geen begrensde boombreedte. De vraag of het bepalen van de boombreedte van planaire grafen een NP-moeilijk probleem is, staat nog altijd open. Wel is bekend dat er een connectie bestaat tussen de volgende parameters van een planaire graaf: de boombreedte, de zogenaamde 'takbreedte' en de (grootte van de) grootste zogenaamde 'vierkante-grid minor' van de graaf. Er zijn een aantal publicaties waarin bovengrenzen worden verkregen voor de boombreedte van een planaire graaf in termen van de takbreedte en de grootste vierkante-grid minor van de graaf, zie o.a. [11, 12, 17, 18]. Eén van de verkregen resultaten is dat de boombreedte van een planaire graaf hooguit viereneenhalf maal zo groot kan zijn als de grootste vierkante-grid minor in de graaf. In **Hoofdstuk 5** wordt onderzocht in hoeverre deze bovengrens nog naar beneden kan worden bijgesteld. Er wordt een klasse van planaire grafen geconstrueerd waarvoor de takbreedte gelijk is aan de grootste vierkante-grid minor en waarvoor de boombreedte anderhalf keer zo groot is als de takbreedte. Deze ondergrens voor de bovengrens is later verbeterd door Gu en Tamaki [12], die een klasse van planaire grafen construeren waarvoor de boombreedte gelijk is aan de takbreedte en tweemaal zo groot is als de grootste vierkante-grid minor. Een interessante open vraag is of er een klasse van planaire grafen bestaat waarvoor de drie parameters paarsgewijs van elkaar verschillen.

Vervolgens wordt in **Hoofdstuk 6** de focus verlegd naar de studie van boombreedte van grafen in het algemeen. Het boombreedte probleem wordt in dit hoofdstuk op twee manieren als een geheeltallig lineair programmeringsprobleem geformuleerd. De eerste formulering is afgeleid van de 'knoop eliminatie volgorde' formulering zoals die is opgesteld door Koster en Bodlaender [13]. Deze formulering wordt gefuseerd met de 'stroom metriek' aanpak van Bornstein en Vempala [5]. Door het toevoegen van een aantal nieuwe ongelijkheden wordt in onze eerste formulering het toegelaten oplossingsgebied van de relaxatie van de formulering van Koster en Bodlaender gereduceerd.

Aansluitend daarop wordt in **Hoofdstuk 6** een tweede geheeltallig lineair programmeringsprobleem voor boombreedte geformuleerd. Deze nieuwe structurele formulering is gebaseerd op een inbedding van een optimale boom decompositie in een grid graaf, die past binnen het raamwerk van een 'lokale vertakkings methode', die bedacht is door Fischetti en Lodi [10]. Gebruikmakend van dit gegeven wordt in dit proefschrift een exact algoritme voor het probleem geconstrueerd. Om meer inzicht te krijgen in de sterke en zwakke punten van beide boombreedte formuleringen zouden in een vervolgonderzoek rekenexperimenten op verschillende klassen van grafen uitgevoerd moeten worden.

Tenslotte wordt in **Deel III** van het proefschrift een toepassing behandeld van het gebruik van boombreedte en boom decomposities in algoritmes. Het vraagstuk wat daarvoor wordt gebruikt is het uitsluiten van een bepaalde subgraaf in een graaf door het verwijderen van een minimum aantal lijnen uit de graaf. Dit probleem is NP-moeilijk voor algemene grafen. Uit een bekend resultaat van Courcelle [6, 7] volgt dat het probleem theoretisch oplosbaar is in lineaire tijd op grafen met begrensde boombreedte. Deze benadering zou echter leiden tot een algoritme met een enorme verborgen constante term in de $O()$-notatie van de looptijd, en zou derhalve niet praktisch zijn. In **Hoofdstuk 7** wordt voor het beschreven subgraaf eliminatie probleem een combinatorisch algoritme gepresenteerd waarvan de looptijd lineair is, voor grafen waarvan de maximum graad van de knopen begrensd is. Verder wordt in dit hoofdstuk aangetoond dat een optimale oplossing voor het subgraaf eliminatie probleem op planaire grafen kan worden benaderd door gebruik te maken van een techniek, die bedacht is door Baker [2]. Het blijft vooralsnog een open vraag of er ook voor grafen waarvoor de graad van de knopen niet begrensd is een lineaire tijd algoritme en een polynomiaal benaderingsschema voor het subgraaf eliminatie probleem bestaat.

References

[1] P.K. Agarwal, Raghavan P., and Tamaki H.: *Motion Planning for a Steering Constrained Robot through Moderate Obstacles.* In Proc. of the 27th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 1995) (1995), pp. 343–352.

[2] B.S. Baker: *Approximation Algorithms for* NP-*Complete Problems on Planar Graphs.* J. ACM, **41**(1) (1994), pp. 153–180.

[3] *Basic Helicopter Handbook.* US Department of Transportation, Federal Aviation Administration, Advisory Circular 61-13A, (1973).

[4] D.P. Bertsekas: *Dynamic Programming and Optimal Control.* Athena Scientific (1995).

[5] C.F. Bornstein and Vempala S.: *Flow Metrics.* Theor. Comput. Sci., **321**(1) (2004), pp. 13–24.

[6] B. Courcelle: *The Monadic Second-Order Logic of Graphs. I. Recognizable Sets of Finite Graphs.* Inf. and Comput., **85**(1) (1990), pp. 12–75.

[7] B. Courcelle: *The Monadic Second-Order Logic of Graphs III: Tree-decompositions, Minor and Complexity Issues.* ITA, **26** (1992), pp. 257–286.

[8] D. Cox, Little J. and O'Shea D.: *Ideals, Varieties and Algorithms*, Springer-Verlag, New York (1992).

[9] O. Daescu, Mitchell J.S.B., Ntafos S., Palmer J.D. and Yap C.K.: *k-Link Shortest Paths in Weighted Subdivisions.* In Proc. of the 9th International Workshop on Algorithms and Data Structures (WADS 2005), Lecture Notes in Computer Science, **3608**, Springer (2005), pp. 325–327.

[10] M. Fischetti, and Lodi A.: *Local Branching.* Math. Program., **98**(1-3) (2003), pp. 23–47.

[11] A.Grigoriev: *Treewidth and Large Grid Minors in Planar Graphs.* Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, **13**(1) (2011), pp. 13–20.

[12] Q.P. Gu and Tamaki H.: *Improved Bounds on the Planar Branchwidth with Respect to the Largest Grid Minor Size.* In Proc. of the 21st International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2010) Part II, Lecture Notes in Computer Science, **6507**, Springer (2010), pp. 85–96.

[13] A.M.C.A. Koster and Bodlaender H.L.: *Private communication.*

[14] W.H. Press, Teukolsky S.A., Vetterling W.T. and Flannery B.P.: *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing.* Cambridge University Press, Cambridge (1992).

[15] N. Robertson and Seymour P.D.: *Graph Minors. I. Excluding a Forest.* J. Comb. Theory, Ser.B, **35**(1) (1983), pp. 39–61.

[16] N. Robertson and Seymour P.D.: *Graph Minors. II. Algorithmic Aspects of Tree-Width.* J. Algorithms, **7**(3) (1986), pp. 309–322.

[17] N. Robertson and Seymour P.D.: *Graph Minors. X. Obstructions to Tree-decomposition.* J. Comb. Theory, Ser. B, **52**(2) (1991), pp. 153–190.

[18] R. Thomas: *Tree-Decompositions of Graphs.* `http://people.math.gatech.edu/~thomas/SLIDE/CBMS/trdec.pdf`

[19] A. Venkatraman and Bhat S.P.: *Planar Time-Optimal and Length-Optimal Paths under Acceleration Constraints.* In Proc. of Americal Control Conference (2006), pp. 5219–5224.

[20] J.W. Yeol, Ryu Y.S. and Montalvo M.A.: *Shortest Trajectory Planning of Wheeled Mobile Robots with Constraints.* In Proc. of Networking, Sensing and Control, IEEE (2005), pp. 883–888.